Lógica y Computabilidad
Práctica 3: Cálculo de Predicados

Notación: Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y E es una expresión de $\mathcal{L}$, entonces $\#VarR(E)$ es el número de variables que figuran en E contadas tantas veces como aparecen.

Ejercicio 1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicados binario P^2, un símbolo de función binario f^2 y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones de $\mathcal{L}$ representan términos, donde x, y denotan variables.

a) $f^2(cx)$

b) $f^2(f^2(cc))$

c) $\exists x f^2(xx)$

d) $f^2(f^2(xy)f^2(xy))$

En los casos que dichas expresiones sean términos encontrar para cada uno de ellos una cadena de formación.

Ejercicio 2 Definir inductivamente la noción de subtérmino.

Ejercicio 3 (*) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea f^k un símbolo de función k-ario. Probar que si $t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_k$ son términos de $\mathcal{L}$ tales que $f^k(t_1 \ldots t_k) = f^k(s_1 \ldots s_k)$ entonces $t_i = s_i$ para todo índice i. Deducir que si t es un término de $\mathcal{L}$ que no es una variable ni símbolo de constante, entonces existe un único $k \in \mathbf{N}$, únicos términos $t_1, \ldots, t_k$ y un único símbolo de función f^k k-ario tales que $t = f^k(t_1 \ldots t_k)$.

Ejercicio 4 Sea C una cadena de formación de un término t. Probar que todos los eslabones de C son subtérminos.

Ejercicio 5 Sea t un término, x una variable y C una cadena de formación de t, con $C = X_1 \ldots X_n$. Probar que la cadena $C' = X'_1 \ldots X'_n$ es cadena de formación de $X'_n = t(x/s)$, donde para cada $1 \leq i \leq n$, $X'_i = X_i(x/s)$ y s es un término de $\mathcal{L}$.

Ejercicio 6 Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio 1). Decidir si las siguientes expresiones de $\mathcal{L}$ son fórmulas:

a) $\exists x P^2(xc)$

b) $\forall x P^2(xc) \vee \forall x P^2(xx)$

c) $\forall f^2(xx) P^2(xc)$

d) $\exists x f^2(x)$

e) $\exists x \forall x (P^2(xx) \to P^2(cc))$

Ejercicio 7 Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio 1). En cada una de las siguientes fórmulas encontrar las variables libres y ligadas.

a) $\forall x \exists y P^2(xy)$

b) $(\forall x P^2(f^2(xx)y) \to \forall y \forall x P^2(xy))$

c) $(\exists x \exists y \exists z ((P^2(xy) \wedge P^2(yz)) \to P(xz)) \wedge \forall w P^2(wz))$.

Ejercicio 8 Para cada una de las fórmulas del ejercicio anterior encontrar todas las cadenas de formación minimales.

Ejercicio 9 (*) Si t es un término de un lenguaje de primer orden y k es un número natural positivo, se define:

$comp_k(t)$ = número de símbolos de función k-arios que figuran en t contados tantas veces como aparecen.

Si $k = 0$,
$comp_0(t)$ = número de símbolos de constante que figuran en t contados tantas veces como aparecen.

Encontrar una fórmula que vincule estas cantidades con $\#VarR(t)$ y probarlas inductivamente.

Ejercicio 10 (*) Si α es una fórmula de un lenguaje de primer orden se define para cada número natural k positivo:

$comp_k(\alpha)$ = número de símbolos de predicados k-arios que figuran en α contados tantas veces como aparecen.

Al igual que el ejercicio anterior encontrar una fórmula que vincule estas complejidades con las definidas en el ejercicio anterior, con $\#VarR(\alpha)$ y probarlas inductivamente. Comparar con el ejercicio 7 de la práctica 1.