Práctica 5: Árboles del cálculo de predicados

Ejercicio 1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicados binario P. Decidir si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$\alpha = \forall x \exists y (P(x, y) \to P(y, x))$,
$\beta = \forall x \exists y (P(x, y) \to \exists z P(z, x)$

Ejercicio 2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicados unario P, un símbolo de predicados binario Q y un símbolo de función unario Q. Probar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

i) $(\exists y P(y) \to \forall x \exists y P(y))$.

ii) $(\exists y P(y) \to \exists y \exists x P(y))$.

iii) $(\forall x P(x) \to P(t))$, donde t es un término sin variables.

iv) $(\forall x \forall y Q(x, y) \to \forall y Q(y, y))$.

v) $(P(t) \to \exists x P(x))$, donde t es un término sin variables.

vi) $(\forall x Q(x, f(x)) \to \forall x \exists y Q(x, y))$.

Ejercicio 3 Probar que si ϕ es un enunciado universalmente válido, entonces $\forall x \phi$ también lo es. Probar tanbién que si ϕ y $(\phi \to \psi)$ son universalmente válidos, entonces ψ es universalmente válido.

Ejercicio 4 Introducir reglas de expansión de árboles para $\leftrightarrow$ y demostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

i) $(\forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y))$.

ii) $(\forall x (Q(x) \wedge \exists y R(y)) \leftrightarrow (\forall x Q(x) \wedge \exists y R(y)))$

iii) $(\forall x (Q(x) \to \exists y P(y)) \leftrightarrow (\exists x Q(x) \to \exists y P(y)))$

Ejercicio 5 Decidir usando árboles de refutación si $\alpha \in C(\Gamma)$ en los siguientes casos:

i) $\Gamma = \{\forall x \exists y P(x, y)\}$ y $\alpha = \exists y \forall x P(x, y)$

ii) $\Gamma = \{\exists y \forall x P(x, y)\}$ y $\alpha = \forall x \exists y P(x, y)$.

iii) $\Gamma = \emptyset, \alpha = \forall x \forall y (Q(x) \to (Q(y) \to Q(x)))$.

Ejercicio 6. Analizar si α y β son equivalentes.
i) $\alpha = \neg \forall x \phi(x)$ y $\beta = \exists x \neg \phi(x)$.

ii) $\alpha = \forall x \phi(x)$ y $\beta = \neg \exists x \neg \phi(x)$.
iii) $\alpha = \forall x \exists y P(x, y)$ y $\beta = \exists y \forall x P(x, y)$.

Ejercicio 7. Decidir si las siguientes fórmula son universalmente válidas.
a) $\forall x \exists y \forall z \exists w (P(x, y) \vee \neg P(w, z)$.
b) $((\forall x (P(x) \to R(x)) \wedge (\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))) \to \exists x (R(x) \wedge \neg Q(x)))$.
c) $(\forall x (P(x) \vee R(x)) \to \forall x P(x))$
d) $(\exists x (P(x) \wedge R(c)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \wedge R(c)))$.

Ejercicio 8. a) Sean las fórmulas:
$\alpha_1 = \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z))$.
$\alpha_2 = \forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$.
$\alpha_3 = \forall x \exists y P(x, y)$.
$\alpha_4 = \forall x P(x, x)$.
Estudiar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \alpha_4$, análogamente $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_4$.
b) Decidir si $\{\exists x \forall y R(x, y, f(x, y))\} \models \exists x \forall y \exists z R(x, y, z)$.
c) $\{\exists y \forall x P(x, y), \forall z \forall x (P(z, x) \to P(z, c))\} \models P(c, c)$.

Ejercicio 9. Sea $\Gamma = \{\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \to (x = y)), \forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))\}$. Probar que $\Gamma \models \alpha$, donde $\alpha = \forall x \forall y (R(x, y) \to (x = y))$.

Ejercicio 10. Sea L un lenguaje con igualdad, un símbolo de predicado binario y un símbolo de función unario. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ y α_5 las siguientes fórmulas de L:
1) $\alpha_1 = \forall x \forall y (P(x, y) \to \neg P(y, x))$.
2) $\alpha_2 = \forall x \forall y (x = y \vee P(x, y) \vee P(y, x))$.
3) $\alpha_3 = \forall x \forall y (P(x, y) \to P(f(x), f(y)))$.
4) $\alpha_4 = \forall x f(f(x)) = f(x)$.
5) $\alpha_5 = \forall x f(x) = x$.
Probar que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \alpha_5$.