Práctica 1

1.1 Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A_1 = \{*, \sim\}$ mediante las siguientes reglas:

i) $*$ es una palabra.

ii) Si X es una palabra, entonces $\sim X$ y $*X$ también lo son.

iii) X es una palabra si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

a. Escribir cinco expresiones de $\mathcal{L}_1$ que no sean palabras, y cinco que sí lo sean.

b. Presentar, si es posible, un método para decidir en un número finito de pasos, si una expresión dada de $\mathcal{L}_1$ es o no una palabra.

1.2 Sea $A = \{a, b, c\}$, $S = \{\circ, \clubsuit\}$ con $A \cap S = \emptyset$. Sea $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

i) La expresión vacía (notada β) pertenece a $\mathcal{L}$.

ii) Si $x \in A$ entonces x es una palabra.

iii) Si α es una palabra, las expresiones $\circ\alpha\clubsuit$ también lo son.

iv) Si α es una palabra y $x \in A$, las expresiones $x\alpha$ y αx son palabras.

v) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) a iv).

Se define el peso de una expresión como el número de $\circ$ que aparecen en la expresión menos el número de $\clubsuit$ que aparecen en la expresión. Probar que las palabras de $\mathcal{L}$ son expresiones de peso 0. ¿Es toda expresión de peso 0 una palabra?. Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.

1.3 Sea A un conjunto finito y sea $S \subseteq A$ un subconjunto no vacío y diferente de A. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje definido como sigue.

i) Si $a \in A \backslash S$, entonces a es una palabra.

ii) Si $s \in S$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ son palabras, entonces $sx_1 \ldots x_n s$ es una palabra.

iii) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) o ii).

a. Probar que si α es una palabra, entonces el número de elementos de S que figura en α es un número par.

b. Probar que no hay unicidad de escritura.

c. Sean α, β palabras y sea β' la expresión que se obtiene sustituyendo todas las apariciones de elementos de $A \backslash S$ en β por α. Por ejemplo, si $\beta = sas$ con $s \in S$ y $a \in A \backslash S$, entonces $\beta' = s\alpha s$. Probar que β' es una palabra.

1.4 Sea $X = \{x, |, f, (,), , , \}$. Definimos el siguiente lenguaje $\mathcal{L} \subseteq X^*$.

i) x_i es una palabra para todo $i \in \mathbf{N}$, donde x_i es la expresión x seguida de i barras. Estas palabras serán llamadas variables y será denotado por V.

ii) Si t y t' son palabras, entonces $f(t, t')$ es una palabra.

iii) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) o ii).

a. Si t_1, t_2, t_3, t_4 son palabras tales que $f(t_1, t_2) = f(t_3, t_4)$, entonces $t_1 = t_3$ y $t_2 = t_4$.

b. Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿ son necesariamente iguales?.

c. Una *valuación* es una función $v : \mathcal{L} \to \mathbf{N}$ tal que $v(f(t, t')) = v(t) + v(t')$ para todo par de palabras t, t'. Probar que si $g : V \to \mathbf{N}$ es una función, entonces existe una valuación $v : \mathcal{L} \to \mathbf{N}$ que extiende a g.

Dos palabras t y t' se dicen *equivalentes* si $v(t) = v(t')$ para toda valuación v.

d. Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿ son equivalentes?.

e. Si dos términos son equivalentes, ¿ tienen las mismas variables?.

1.5 Sea A un conjunto finito y no vacío y sea $\mathcal{L} \subseteq A^*$ un lenguaje. Si n es un número natural mayor que 1, una palabra p de $\mathcal{L}$ se dice *n-irreducible* si no existen n palabras $x_1, \ldots, x_n$ tales que $p = x_1 \ldots x_n$. Una palabra p se dice *irreducible* si es irreducible para todo $n > 1$.

a. Probar que si p es una palabra entonces existe $k \geq 1$ y k palabras $x_1, \ldots, x_k$ tales que $p = x_1 \ldots x_k$ y x_j es irreducible para todo j entre 1 y k. ¿Es única la representación?.

b. En cada uno de lo ejercicios anteriores encontrar las palabras n-irreducibles para cada $n > 1$.

1.6 Sea $\mathcal{P}$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A = \{p, |, C, B, L, N\}$, donde las palabras son llamadas fórmulas, y la siguiente gramática:

i) p_i es una fórmula para todo $i \in \mathbf{N}$.

ii) Si X es una fórmula, entonces NX es una fórmula.

iii) Si X, Y son fórmulas, entonces $*XY$ también lo son, con $* \in \{C, B, L\}$.

iv) X es una fórmula si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

Donde $p_0 = p, p_1 = p|, \ldots, p_i$ es la expresión p seguida de i barras.

Este lenguaje es conocido como el lenguaje correspondiente a la *notación polaca*.

a. Decidir si las siguientes expresiones de $\mathcal{P}$ son fórmulas:
   a1) $Cp_1Cp_2p_1$.
   a2) $CCp_1p_2CCp_2p_3Cp_1p_3$.
   a3) $CCCp_1p_2p_2CCp_2p_1p_1$.
   a4) $CCNp_1Np_2Cp_2p_1$.
   a5) $Np_1CNp_1Cp_1p_2$.
   a6) $Np_1p_2Cp_1p_2$.
   a7) p_2Cp_1.
   a8) Np_1Cp_2.

b. Se define el peso de la expresión X, $p(X)$, como el número de ocurrencias de C en X más el número de ocurrencias de B en X más el número de ocurrencias de L en X menos el número de ocurrencias de las variables proposicionales en X. Calcular el peso de las expresiones de a..

c. Demostrar que si X es una fórmula, entonces $p(X) = -1$. Decidir si vale la recíproca.

d. Demostrar que si P, Q, R, S son fórmulas y $*, \circ \in \{C, B, L\}$ son tales que $*PQ = \circ RS$, entonces $* = \circ, P = R$ y $Q = S$.

e. Sean $\mathcal{L}$ el lenguaje del cálculo proposicional, F el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, G el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$, E el conjunto de expresiones de $\mathcal{L}$ y EP el conjunto de expresiones de $\mathcal{P}$. Se define una función de traducción $T : G \to E$ de la siguiente forma: si $X, Y \in G$ entonces:

   i) $T(p_i) = p_i$ para todo $i \in \mathbf{N}$.
   ii) $T(NX) = \neg T(X)$.
   iii) $T(CXY) = (T(X) \to T(Y))$.
   iv) $T(BXY) = (T(X) \vee T(Y))$.
   v) $T(LXY) = (T(X) \wedge T(Y))$.

   Traducir todas las fórmulas de a..

f. Probar que si $X \in G$, entonces $T(X) \in F$.

g. Definir una función de traducción T_1 de F en EP de modo que si $X \in F$ entonces $T(X) \in G$.

Lenguaje del cálculo proposicional

En los ejercicios siguientes, $c(\alpha)$ denotará el grado de complejidad de una fórmula α, $l^*(\alpha)$ la longitud modificada de α y $\bar{l}(\alpha)$ la *longitud standard* de α que se define inductivamente como sigue: $\bar{l}(p_i) = 1$ para toda variable proposicional p_i, $\bar{l}(\neg\alpha) = 1 + \bar{l}(\alpha)$ y $\bar{l}((\alpha \circ \beta)) = \bar{l}(\alpha) + \bar{l}(\beta) + 3$ para todo conectivo binario $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1.7 Para cada una de las siguientes fórmulas del cálculo proposicional, encontrar dos cadenas de formación de modo tal que en todo eslabón de cada una de las cadenas encontradas, no aparezcan variables proposicionales diferentes de las que figuren en la fórmula dada.

a. $((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_2)$

b. $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$

c. $(p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3))$.

1.8 Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sea $X_1 X_2 \ldots X_n$ una cadena de formación de α. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$ tal que $X_i = \beta$.

1.9 Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a. Para todo par de subfórmulas β y γ de α, β es subfórmula de γ o γ es subfórmula de β.

b. Existe una cadena de formación $X_1 X_2 \ldots X_n$ de α tal que X_i es subfórmula de X_{i+1} para todo $1 \leq i \leq n-1$.

1.10 Sea α una fórmula del cálculo proposicional que satisface la condición a. del ejercicio anterior. Probar que en α figura solamente una variable proposicional. ¿ Vale la recíproca?. Es decir, si α tiene una sola variable proposicional, ¿ Se cumple a.?.

1.11 a. Sea α una fórmula del cálculo proposicional tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.

b. Sean k, n números naturales tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si α es una fórmula del cálculo proposicional tal que $c(\alpha) = n$, ¿existe una subfórmula de α que tenga grado de complejidad k?.

1.12 Una fórmula del cálculo proposicional se dice *binaria* si el símbolo de negación no figura en dicha fórmula.

a. Hallar todos los números naturales n tales que existe una fórmula binaria α de longitud standard n.

b. Encontrar una fórmula que relacione el grado de complejidad de una fórmula binaria con su longitud standard.

1.13 Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una sucesión de fórmulas del cálculo proposicional. Si β es una expresión del cálculo proposicional, definimos $s(\beta)$ a la expresión que se obtiene de reemplazar en β la $i-$ ésima variable proposicional p_i por la fórmula α_i, en el caso que p_i figure en β.

a. Definir formalmente $s(\beta)$ para toda expresión β.

b. Probar que si β es una fórmula, entonces $s(\beta)$ es una fórmula.

1.14 Dos fórmulas α y β del cálculo proposicional se dicen *sintácticamente equivalentes*, y se nota $\alpha \sim \beta$, si existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de fórmulas del cálculo proposicional tal que α_i es una variable proposicional para todo i, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, y $s(\beta) = \alpha$, donde $s(\beta)$ es la expresión del ejercicio anterior.

a. Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional.

b. Probar que si $\alpha \sim \beta$, entonces α y β tienen la misma longitud standard, la misma longitud modificada y el mismo grado de complejidad.

1.15 Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Sea $\alpha_\neg$ a la expresión que se obtiene de eliminar el símbolo de negación en α. Por ejemplo, si $\alpha = (p_1 \to \neg p_2)$, entonces $\alpha_\neg = (p_1 \to p_2)$.

a. Definir formalmente $\alpha_\neg$ para toda fórmula α.

b. Probar que si α es una fórmula, entonces $\alpha_\neg$ es también una fórmula.

1.16 Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Probar que $c(\alpha) < \bar{l}(\alpha)$. Probar también que $c(\alpha) + 1 = \bar{l}(\alpha)$ si y sólo si α es una variable proposicional o bien $\neg$ es el único conectivo que figura en α.

1.17 Establecer resultados análogos a los ejercicios 12) y 16) para la longitud modificada l^*.

1.18 Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sean β_1, β_2 subfórmulas de α diferentes de α.

a. Probar que si α es binaria (ver Ejercicio 12), entonces $c(\beta_1) + c(\beta_2) \leq c(\alpha)$.

b. Probar que si α no es binaria, lo afirmado en a. es falso.

c. Probar que lo afirmado en a. también es falso si se suman más de tres subfórmulas diferentes de α.

1.19 Una fórmula α del cálculo proposicional se dice *prima* si para todo par de subfórmulas α_1, α_2 de α, $c(\alpha) = c(\alpha_1) \cdot c(\alpha_2)$ implica $c(\alpha) = c(\alpha_1)$ o $c(\alpha) = c(\alpha_2)$.

a. Probar que si $c(\alpha)$es un número primo, entonces α es prima.

b. Mostrar con un ejemplo que la recíproca de a. es falsa.

c. Probar que si α es una fórmula, entonces existe $n \in \mathbf{N}$ y existen n fórmulas primas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tales que $c(\alpha) = c(\beta_1) \cdot \ldots \cdot c(\beta_n)$.

Práctica 2

Semántica del cálculo proposicional

En lo que sigue, **Form** denotará el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional y **Var** al conjunto de variables proposicionales. Si $\alpha \in$ **Form**, notaremos con **Var**(α) al subconjunto de **Var** cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en α. Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son las primeras $n+1$ variables proposicionales, notaremos con **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ al subconjunto de **Form** formado por las fórmulas α tales que **Var**$(\alpha) \subseteq \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$. Finalmente, notaremos con **Val** al conjunto de las valuaciones.

2.1 Sea v : **Form** $\to \{0,1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = \neg p_1$.

b. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

c. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

d. $\alpha = \neg p_4$.

e. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

2.2 Sean v_1, v_2 : **Form** $\to \{0,1\}$ dos valuaciones tales que $v_1(p_i) = v_2(p_i), 1 \leq i \leq 2$. Si $\alpha \in F(p_1, p_2)$ y $v_1(\alpha) = 0$, calcular $v_2(\neg\alpha)$.

2.3 i) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$, siendo:

a. $\alpha = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.

b. $\alpha = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.

c. $\alpha = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

ii) Para las fórmulas de la parte i), hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin$ **Var**(α).

2.4 Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:

a. El “o” exclusivo.

b. $(p_1 \to (p_2 \to p_1))$.

c. $((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$.

2.5 Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

p_1	p_2	p_3	α	p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0

2.6 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Probar:

a. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

b. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

c. $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

d. Si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

2.7 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b. Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

2.8 Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que $\alpha \vee p_i$ es tautología y $\alpha \wedge p_i$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α. Probar que α tiene una sola variable proposicional.

2.9 Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{Form}$ y sea $\sim$ la siguiente relación binaria definida sobre $\mathbf{Val}$:
$v_1 \sim v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

a. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b. Probar que el número de elementos del conjunto cociente $\mathbf{Val}/\sim$ es menor o igual que 2^k.

c. Para cada número natural $n \leq 2^k$, encontrar k fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $\mathbf{Val}/\sim$ tenga exacatamente n elementos.

Recordar que dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v. Notaremos con $\equiv_n$ a la restricción de la relación $\equiv$ a $\mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n) \times \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, o sea $\alpha \equiv_n \beta$ si y sólo si $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ y $\alpha \equiv \beta$.

2.10 Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:

a. $(p_1 \wedge p_2)$; $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$.

b. $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.

c. $p_1 \rightarrow p_2; \neg p_2 \rightarrow \neg p_1$.

2.11 Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes, (ver el Ejercicio 1.14). ¿ Son necesariamente equivalentes?.

2.12 Sea $\alpha \in$ **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tal que $\alpha \vee \neg p_i$ es tautología para todo $0 \leq i \leq n$. Probar que α es tautología o $\alpha \equiv (p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n)$, donde $(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n)$ es la fórmula que se define inductivamente como sigue: si $n = 0$, la fórmula es p_0, si $n > 0$, entonces $(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n) = ((p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_{n-1}) \vee p_n)$.

2.13 Sea **Form**$/\equiv$ el conjunto cociente correspondiente a $\equiv$. Si $\alpha \in$ **Form**, $|\alpha|$ denotará la clase de equivalencia de α. Si $\alpha, \beta \in$ **Form** definimos en **Form**$/\equiv$ la siguiente relación $\leq$: $|\alpha| \leq |\beta|$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.

a. Probar que **Form**$/\equiv$ es infinito y que $\leq$ está bien definida.

b. Probar que $\leq$ es una relación de orden en **Form**$/\equiv$.

c. Si $\alpha, \beta \in$ **Form**, definimos en **Form**$/\equiv$ las operaciones binarias, $\wedge^*$, $\vee^*$ y la operación unaria $\neg^*$ como sigue:
$|\alpha| \wedge^* |\beta| = |\alpha \wedge \beta|, |\alpha| \vee^* |\beta| = |\alpha \vee \beta|$, $\neg^*|\alpha| = |\neg\alpha|$.
Probar que :
c1) $\wedge^*$, $\vee*$ y $\neg^*$ están bien definidas.
c2) $|\alpha| \wedge^* |\beta| = |\beta| \wedge^* |\alpha|, |\alpha| \vee^* |\beta| = |\beta| \vee^* |\alpha|$.
c3) $|\alpha| \wedge^* |\alpha| = |\alpha| \vee^* |\alpha| = |\alpha|$.
c4) $|\alpha| \wedge^* (|\alpha| \vee^* |\beta|) = |\alpha|, |\alpha| \vee^* (|\alpha| \wedge^* |\beta|) = |\alpha|$.
c5) $|\alpha| \wedge^* (|\beta| \vee^* |\gamma|) = (|\alpha| \wedge^* |\beta|) \vee^* (|\alpha| \wedge^* |\gamma|)$.
c6) Probar que $|\alpha| \leq |\beta|$ sii $|\alpha| = |\alpha| \wedge^* |\beta|)$ si y sólo si $|\alpha| \vee^* |\beta| = |\beta|$.
c7) Probar que si α es una tautología y β es una contradicción, entonces para toda fórmula γ se cumple $|\beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha|$, $|\gamma| \vee^* \neg^*|\gamma| = |\alpha|$ y $|\gamma| \wedge^* \neg^*|\gamma| = |\beta|$.
Observación: El conjunto **Form**$/\equiv$ se denomina el álgebra de Lindenbaum del cálculo proposicional y resulta ser un álgebra de Boole con el orden $\leq$ definido arriba.

2.14 Sean α y β en **Form** tales que $|\alpha| < |\beta|$. Probar que existe una fórmula γ tal que $|\alpha| < |\gamma| < |\beta|$.

2.15 Sea **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)/\equiv_n$ el conjunto cociente respecto a $\equiv_n$. Si $\alpha \in$ **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, notaremos con $|\alpha|_n$ a la clase de equivalencia de α respecto a $\equiv_n$.

a. Probar que **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)/\equiv_n$ es un conjunto finito y calcular su cardinal.

b. Dar un ejemplo de dos fórmulas $\alpha, \beta \in$ **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tales que $|\alpha|_n < |\beta|_n$ tales que no exista una fórmula $\gamma \in$ **Form**$(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tal que $|\alpha|_n < |\gamma|_n < |\beta|_n$.

2.16 Dado un conjunto de conectivos, se dice que es adecuado si a partir de sus elementos pueden definirse todos los demás conectivos. Luego toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de un conjunto adecuado.

a. Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.

b. Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}, \{\vee, \wedge\}, \{\vee, \rightarrow\}$.

2.17 Sea $\alpha \in$ **Form** tal que $\vee$ es el único conectivo que figura en α. Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que $\rightarrow$ sea el único conectivo que figure en γ.

2.18 Probar que el resultado del ejercicio anterior es falso si se considera el conectivo $\wedge$ en lugar de $\vee$.

2.19 Si α y β son fórmulas, se nota $\alpha|\beta$ en lugar de $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, conocida como barra de Sheffer; y $\alpha \downarrow \beta$ en lugar de $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, barra de Nicod.

a. Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.

b. Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

c. Probar que si $\{*\}$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ o $\downarrow$.

2.20 Analizar si los siguientes conectivos ternarios son adecuados:

a. $p * q * r = (p \rightarrow (\neg q \wedge r))$.

b. $p * q * r = (p \rightarrow (q \wedge r))$.

donde p, q, r son variables proposicionales.

2.21 Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{0\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conectivo 0-ario, caracterizado por $v(0) = 0$ para toda valuación.

a. Probar que $\{0, \rightarrow\}$ es adecuado.

b. Si en lugar de agregar 0, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo 0-ario 1, caracterizado por $v(1) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{1, \rightarrow\}$?.

Práctica 3

Consecuencia lógica y árboles

Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de Γ.

3.1 Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

a. $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

b. $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1\}$.

3.2 Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a. Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible. Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta.

b. Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfactible.

3.3 Sea Γ un conjunto de fórmulas. Probar que existen dos conjuntos insatisfactibles de fórmulas Γ_1 y Γ_2 tales que $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

3.4 Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

3.5 a. Probar que existe un conjunto Γ de fórmulas del cálculo proposicional que satisface las siguientes propiedades:

i) Γ es satisfactible.

ii) $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$.

b. Más generalmente, dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ, probar que existe $\Gamma' \subseteq \mathbf{Form}$ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' satisface 1) y 2) de la parte a..

3.6 Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas.

a. Probar que $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

b. Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

c. Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

d. Probar que $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

e. Probar que $X \equiv Y$ si y sólo si $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(Y)$.

3.7 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

b. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

ii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

iii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \rightarrow \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

3.8 Demostrar que son equivalentes:

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

3.9 Probar utilizando árboles que las siguientes fórmulas son contingencias y para cada una de ellas hallar una valuación que las satisfaga y otra que no la satisfaga:

a. $((p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_1)) \rightarrow \neg(p_2 \vee \neg p_1))$.

b. $((p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)) \vee ((p_3 \wedge \neg p_3) \vee (p_5 \rightarrow p_6)))$.

3.10 Utilizando el método de los árboles, decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias, y escribirlas en forma normal disyuntiva utilizando también el método de los árboles:

a. $(\neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \rightarrow p_3)))$.

b. $\neg((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)))$.

c. $((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_3 \rightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.

d. $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4)$.

e. $(((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1)$.

3.11 Por medio de los árboles, decicir si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = (p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_0))$, $\Gamma = \{p_1, p_0, \neg p_0\}$.

b. $\alpha = (p_1 \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, p_1 \rightarrow \neg p_0\}$.

c. $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, (p_2 \vee p_0), (p_1 \wedge p_0)\}$.

3.12 Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que α es consecuencia lógica del conjunto formado por todas las subfórmulas de α diferentes de α.

a. Dar ejemplos de fórmulas que tienen esta propiedad y probarlo por medio de árboles.

b. ¿Puede dar una caracterización de qué fórmulas cumplen esta propiedad?.

3.13 Sea Γ un conjunto finito y satisfactible de fórmulas. Probar que el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es infinito.

3.14 Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas del cálculo proposicional que satisface la siguiente propiedad:

Para toda fórmula α, $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$

3.15 Probar que si $\alpha \vee \beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$, entonces $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ para todo par de fórmulas α, β.

3.16 Dar ejemplos de conjuntos de fórmulas del cálculo proposicional que verifiquen la hipótesis del ejercicio anterior.

3.17 Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que satisface la siguiente propiedad:

Si $\mathbf{Con}(\Gamma) = \Gamma$.

3.18 Probar que Γ es infinito. ¿Puede dar ejemplos de estos conjuntos?.

3.19 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si todo árbol de refutación de una fórmula es abierto, entonces la fórmula es una tautología.
b. Si α es contradicción, entonces todo árbol de refutación de α es cerrado.
c. Si una fórmula admite un árbol de refutación completo y cerrado, entonces todo árbol de refutación completo de dicha fórmula es cerrado.

3.20 Sean Γ un conjunto de fórmulas y sea α una fórmula. Diremos que α es anticonsecuencia de Γ si se cumple lo siguiente:

Si v es una valuación tal que $v(\alpha) = 0$, entonces $v(\beta) = 0$ para toda $\beta \in \Gamma$.

Si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ ¿es α es anticonsecuencia de Γ?.

Si α es anticonsecuencia de Γ, ¿es α consecuencia de Γ?.

3.21 Dar ejemplos de fórmulas que sean anticonsecuencia de algún conjunto Γ y enunciar propiedades análogas a las del ejercicio 6) para la noción de anticonsecuencia.

Práctica 4

Compacidad

4.1 Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfactibles de fórmulas, tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

4.2 Enunciar y demostrar resultados análogos a los del ejercicio anterior cuando se consideran más de dos conjuntos.

4.3 Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que verifica la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología o bien $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.

4.4 Sea Γ un conjunto de fórmulas. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ, entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

4.5 Sea X una fórmula satisfactible. Se construye un conjunto Γ inductivamente del siguiente modo: $\Gamma_0 = \{X\}$, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{Y\}$, donde Y es una fórmula que es disyunción de literales (variables proposicionales o negación de variables proposicionales), y que contiene una variable proposicional o negación de una variable proposicional que no aparece en ninguna de las fórmulas de Γ_i. Si $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Gamma_i$, probar que Γ es satisfactible.

4.6 Usar el ejercicio anterior, para dar ejemplos de conjuntos satisfactibles infinitos.

4.7 Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ y Γ un conjunto de fórmulas tales que α es anticonsecuencia de Γ. ¿Es α anticonsecuencia de un subconjunto finito de Γ?.

4.8 Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Diremos que Γ_2 *es consecuencia* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces existe una fórmula de Γ_2 tal que dicha valuación hace verdadera a la fórmula. Diremos que Γ_2 *es consecuencia fuerte* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces dicha valuación hace verdadera a todas las fórmulas de Γ_2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si Γ_2 es consecuencia de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia de S.

b. Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S.

4.9 Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Se define $\Gamma_1 \to \Gamma_2 = \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$. Probar que si $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ es satisfactible, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ fórmulas de Γ_2 tales que $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)$ es satisfactible.

4.10 Establecer resultados análogos a los del ejercicio anterior para los otros conectivos.

Práctica 5

Cálculo de predicados

5.1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

a. $\exists f_2(x) P(f_2(x))$.
b. $f_2(f_1(x), f_1(y))$.
c. $\forall x \exists c P(x, c)$.
d. $\forall c \exists x P(x, c)$
e. $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.

5.2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

a. $\forall x \exists y P(x, x)$.
b. $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$.
c. $\exists x(\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.
d. $\forall z(\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

5.3 Para cada uno de los siguientes lenguajes, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g(n, m) = n + m$.
b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.
c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n, n) = n^2 - n$, $c_I = 0 = d_I$.

5.4 En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

i) $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \exists z((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I =<$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

ii) $\forall x(Q(x) \to \exists y(R(y) \land P(y,x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x,y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un esclavo.

iii) $\forall x \forall y(Q(x) \land Q(y)) \to P(f(x,y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x,y) = x + y$.

iv) Para los siguientes enunciados, el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, $P_I(x,y)$ significa x quiere a y, donde P es un símbolo de predicado binario.

a. $\exists x \forall y P(x,y)$

b. $\forall y \exists x P(x,y)$

c. $\exists x \exists y(\forall z P(y,z) \to P(x,y))$.

d. $\exists x \forall y \neg P(x,y)$.

5.5 Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de dos símbolos de función binarios f, g y dos constantes c, d, un símbolo de predicado binario P u un símbolo de predicado ternario T. Para cada uno de los siguientes enunciados e interpretaciones, escribir en el lenguaje castellano la propiedad que determinan y analizar la veracidad o falsedad de dichos enunciados.

a. $\forall x \exists y(x = f(y,y) \lor x = f(f(y,y),d))$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x + y$, $d_I = 1$.

b. $\forall x \forall y(g(x,y) = c \to (x = c \lor y = c))$, $U_I = \mathbf{N}$, $g_I(x,y) = x \cdot y$, $c_I = 0$.

c. $\exists y f(y,y) = d$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x + y$, $d_I = 1$.

d. $\forall x \forall y f(x,y) = f(y,x)$, $U_I = \mathbf{Z}$, $f_I(x,y) = x + y$.

e. $\forall x \exists y \exists z x = f(y,z)$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x^2 + y^2$.

f. Las fórmulas son las mismas que los incisos d. y e., $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = (x+1)^y$.
En los incisos siguientes, $U_I = \mathbf{N}$, $P_I =<$ y $T_I(x,y,z)$ significa $x + y = z$

g. $\forall x \forall y \forall x(T(x,y,z) \to T(y,x,z))$.

h. $\forall x \forall y(T(x,x,y) \to P(x,y))$.

i. $\exists x \forall y T(x,y,y)$.

j. $\forall x \forall y(P(x,y) \to \exists z T(x,z,y))$.

5.6 Traducir las siguientes sentencias en enunciados, donde *todos los A son B* se traducen en enunciados de la forma $\forall x(A(x) \to B(x))$, por ejemplo *todos los hombres son mortales*, se traduce como $\forall x(H(x) \to M(x))$, donde $H_I(x)$ significa x es hombre y $M_I(x)$ se traduce x es mortal. Análogamente, *algunos A son B, ningún A es B* se traducen en enunciados de la forma $\exists x(A(x) \land B(x))$ y $\forall x(A(x) \to \neg B(x))$ respectivamente.

a. Ningún político es honesto.

b. No todas las aves pueden volar.

c. x es trascendente si y sólo si x es irracional.

d. Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.

e. Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.

5.7 Considere la siguiente sentencia e) en el conjunto de los enteros positivos distintos de 1: Si p es un número primo positivo, entonces $a^p - a$ es divisible por p, para todo entero positivo a distinto de 1. Dar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ tal que el único símbolo de predicado sea la con igualdad, sin símbolos de constante, y un enunciado α, tal que en la interpretación correspondiente, α represente la sentencia e).

5.8 Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a. Existen al menos dos elementos.

b. Existen exactamente dos elementos.

c. Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escibir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.

f. Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

5.9 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binario f y con un símbolo de constante c. Decidir si los siguientes enunciados son satisfactibles. En los casos que la respuesta sea afirmativo encontrar dos interpretaciones que satisfagan a dicho enunciados: una que tenga universo finito y la otra no.

a. $\forall x \forall y \forall w \forall z (f(x, y) = f(z, w) \to (x = z \wedge y = w))$

b. $\forall x \forall y (f(x, x) = f(y, y) \to x = y)$.

c. $\forall x \exists y\ x = f(y, y)$.

d. $\forall x f(x, c) = c$.

e. $\forall x (f(x, c) = c \to x = c)$.

f. $(\forall x f(x, c) = c \to x = c)$.

5.10 Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes interpretaciones, encontrar un enunciado que tenga como modelo a la interpretación dada pero que dicho enunciado no satisfecho por todas las interpretaciones de $\mathcal{L}$.

a. $U_I = \mathbf{R}, f_I(x, y) = x \cdot y, c_I = 1$.

b. $U_I = \mathbf{C}, f_I(x, y) = Re(x) + Im(y) + i, c_I = i$.

5.11 donde $\mathbf{R}$ es el conjunto de los números reales, $\mathbf{C}$ es el conjunto de los números complejos y $Re(z), Im(z)$ denotan la parte real y la parte imaginaria.

Práctica 6

6.1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binario f y un símbolo de constante c. Considere las siguientes interpretaciones, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, \cdot, 1)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbf{Z}, \cdot, 1)$ e $\mathcal{I}_3 = (\mathbf{Q}, \cdot, 1)$. Encontrar enunciados ϕ y α tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de ϕ, $\mathcal{I}_2$ no sea modelo de ϕ, $\mathcal{I}_2$ sea modelo de α y $\mathcal{I}_3$ no sea modelo de α, donde $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ denotan el conjunto de los números naturales, enteros y racionales respectivamente.

6.2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Sean α y β los siguientes enunciados de $\mathcal{L}$:

$\alpha = \forall x \exists y f(y) = x$,

$\beta = \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

6.3 Hallar dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de α y no de β e $\mathcal{I}_2$ sea modelo de β pero no de α.

6.4 Dar un enunciado ϕ de primer orden en el lenguaje $\{\leq\}$ con igualdad, tal que $M_1 \models \phi$ y $M_2 \not\models \phi$, donde $M_1 = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \leq)$, donde $a \leq e, e \leq g, b \leq e, c \leq f, d \leq f, f \leq g$, y $M_2 = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \leq)$ donde $a \leq d, b \leq d, c \leq d, d \leq g, e \leq g, f \leq g$.

6.5 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de función unario f. Sean $\mathcal{U}_1$,$\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_3$ las siguientes interpretaciones de $\mathcal{L}$:

$\mathcal{U}_1 = (\mathbf{R}, f_1)$, donde $f_1(x) = x^2$.

$\mathcal{U}_2 = (\mathbf{R}, f_2)$, donde $f_2(x) = x^2 + 1$.

$\mathcal{U}_3 = (\mathbf{N}, f_3)$, donde $f_3(x) = x^2 + 2$.

6.6 Encontrar dos fórmulas α_i de $\mathcal{L}$, $i = 1, 2$, tales que α_i sea modelo de $\mathcal{U}_i$ pero no sea modelo de $\mathcal{U}_{i+1}$ con $i = 1, 2$, donde $\mathbf{R}$ y $\mathbf{N}$ denotan el conjunto de los números reales y naturales respectivamente.

6.7 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Encontrar fórmulas α y β tales que:

a. α sea válida en $(\mathbf{Z}, +)$ y no en $(\mathbf{N}, +)$.

b. β sea válida en $(\mathbf{C}, \cdot)$ pero no en $(\mathbf{R}, \cdot)$.

Definición:

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\mathcal{L} \cup \{c\}$ el lenguaje que se obtiene agregando al lenguaje $\mathcal{L}$ un nuevo símbolo de constante c. Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$ con universo U_I. Un elemento $a \in U_I$ se denomina *distinguible* si y sólo si existe un enunciado ϕ del lenguaje $\mathcal{L} \cup \{c\}$ tal que c figura en ϕ y que tiene la siguiente propiedad: Si $b \in U_I$ y $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \{c_b\}$ es la interpretación de $\mathcal{L} \cup \{c\}$ que extiende a $\mathcal{I}$, con $(c_b)_{I'} = b$, entonces $\mathcal{I}'$ es modelo de ϕ si y sólo $b = a$.

6.8 Dar un ejemplo de un lenguaje y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito, tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguible.

6.9 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, +)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, \cdot)$,

6.10 donde $\mathbf{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

6.11 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,

a. $(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \leq)$, donde: $x_1 < x_2, x_1 < x_3, x_2 < x_4, x_3 < x_4, x_3 < x_5, x_4 < x_6$ y $x_5 < x_6$.

b. $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4, a_2 \leq a_5$.

6.12 Probar que si el universo de una interpretación es finito con n elementos, $n > 1$, y tiene la propiedad que $n-1$ elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

Definición. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ de $\mathcal{L}$ se dicen *isomorfas* si existe una biyección $f : U_{I_1} \to U_{I_2}$ entre sus universos tales que verifican la siguiente propiedad: si P es un símbolo de predicados n-ario del lenguaje, entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in P_{I_1}$ si y sólo si $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in P_{I_2}$; si g es un símbolo de función n-ario, entonces $f(g_{I_1}(a_1, \ldots, a_n)) = g_{I_2}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$; y si c es un símbolo de constante, entonces $f(c_{I_1}) = c_{I_2}$.

6.13 Decidir si las interpretaciones de los siguientes lenguajes son isomorfas:

a. $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, +), \mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, \cdot)$.

b. $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de predicado binario, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, >)$.

c. $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de predicado binario, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbf{Z}, <)$.

d. $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de predicado binario, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, \leq)$.

e. $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario, un símbolo de constante c, $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, \cdot, 2), \mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, \cdot, 3)$.

Práctica 7

Computabilidad

7.1 Escribir en S algoritmos para calcular las siguientes funciones aritméticas:

a. Producto: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. (Usando suma como macro).

b. Potencia: $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$. (Usando producto como macro).

7.2 Demostrar que S computa la función vacía $\emptyset : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$.

7.3 Escribir en S algoritmos para calcular las siguientes funciones de decisión:

a.
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

b.
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

c.
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

d.
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

7.4 Demostrar que el lenguaje S cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1:

a. Computa la función $suc : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, suc(x) = x + 1$.

b. Computa las proyecciones Pin.

c. Computa las constantes Ckn.

Propiedad 2: Si S computa $f : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ y computa $g_i : \mathbf{N}^r \to \mathbf{N}, 1 \leq i \leq k$, entonces S computa la composición:

$h(x_1, \ldots, x_r) = f(g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_r))$.

Propiedad 3:

Computa la función de decisión $d : \mathbf{N}^4 \to \mathbf{N}$:

$$d(x, y, s, t) = \begin{cases} s & \text{si } x = y \\ t & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

7.5 Escribir un programa que compute la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7.6 Escribir un programa que compute la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7.7 Sea $f(x)$ el mayor número natural tal que $2 \cdot n \leq x$. Escribir un programa que compute a f.

7.8 Escribir un programa que compute el mínimo común múltiplo y otro que compute el máximo común divisor.

7.9 Sea $P(x)$ un predicado computable. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } P(x + y) \text{ es verdadero} \\ \uparrow & \text{sino} \end{cases}$$

es parcialmente computable.

7.10 Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función biyectiva y computable. Probar que f^{-1} es computable.

Práctica 8

Funciones recursivas primitivas

8.1 Sean ψ y ϕ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar cuáles de las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva.

a. $f(x, 0) = 17$.
$f(x, y + 1) = f(0, \phi(x, y))$.

b. $f(x, 0) = \psi(x)$.
$f(x, y + 1) = f(x, y) + \phi(y, x)$.

c. $f(x, 0) = \phi(0, x)$.
$f(x, y + 1) = \phi(f(x, y), y + 1)$.

Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h asociadas a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

8.2 Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

a.
$$max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$$

b.
$$min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

c.
$$par(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; par \\ 0 & \text{si } x \; es \; impar \end{cases}$$

d. $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

e. $sqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

f.
$$psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; un \; cuadrado \; perfecto \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8.3 Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

a. La función f_1 de una variable, donde $f_1(0) = \psi(0)$, $f_1(1) = \psi(\psi(1) + 1)) + 1$, y en general:
$f_1(x) = \psi(\psi(\ldots(\psi(x) + 1)\ldots) + 1) + 1$.

b. donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x + 1$.

c. La función f_2 de dos variables, donde $f_2(x,0) = \phi(x,0)$, $f_2(x,1) = \phi(\phi(x,1),0)$, y en general:

$f_2(x,y) = \phi(\phi(\phi(\ldots\phi(\phi(x,y),y-1)\ldots 2),1),0)$.

8.4 Usar las definiciones por sumas y/o productos acotados para establecer la recursividad primitiva de cada una de las funciones siguientes. Suponer que g es una función primitiva recursiva de una variable.

a. $f(y) =$ el número de valores de i en el intervalo $0 \le i \le y$ para los cuales $g(i) > 3$.

b.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i+1) > g(i) \text{ para todos los valores de } i \text{ en el intervalo } x \le i \le y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c.

$$f(w,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x+1), \ldots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8.5 Sea g una función recursiva primitiva de $n+1$ variables. Se define la función f a partir de g por:

$f(x_1,\ldots,x_n,y) = max_{0\le i\le y}(g(x_1,\ldots,x_n,i))$.

De modo que f puede pensarse obtenida a partir de g por una operación de "máximo acotado".

a. Probar que la función f es primitiva recursiva.

b. Generalizar el esquema de definición dado de modo que se permita que los límites superior e inferior de i sean funciones recursivas primitivas arbitrarias de los argumentos de f. (Usar la convención que asigna a f el valor 0 si el límite inferior excede al límite superior). Mostrar que la función resultante f es aún recursiva primitiva.

8.6 Usar minimización acotada para probar que las funciones de los incisos a.,b.,d. y e. del ejercicio 8.2 son primitivas recursivas.

8.7 Sea la función h de una variable definida tal que $h(n)$ es el $n+1$-ésimo dígito significativo en la representación decimal de $\sqrt{2}$. De modo que $h(0) = 1$, $h(1) = 4$, $h(2) = 1$, $h(3) = 4$, etc. Probar que h es primitiva recursiva. (Sugerencia: considerar la función axiliar g, donde $g(n)$ es el número natural representado por los primeros $n+1$ dígitos significativos en la representación de $\sqrt{2}$. Así, $g(0) = 1$, $g(1) = 14$, $g(2) = 141$, $g(3) = 1414$, etc. Usar minimización acotada para probar que g es primitiva recursiva.

8.8 Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

a. $shr(x,n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

b.

$$lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c. $dig(x, n)$ = el n-ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando con 0. Así, $dig(13, 0) = 1, dig(13, 1) = 0, dig(13, 2) = 1, dig(13, 3) = 1, dig(13, 4) = 0$, etc.

d. $wgt(x)$ = el número de unos en la representación binaria de x.

8.9 Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a. $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n.

b. $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n.

8.10 Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a. $G(n, m)$ es la cantidad de números primos entre n y m.

b. $G(n, m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.

Práctica 9

9.1 Probar que una función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico es recursiva, es decir la función dada por la siguiente fórmula:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

9.2 Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbf{N}$.

9.3 Probar que Halt (x, x) no es computable.

9.4 Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x))$ no es computable. (Sugerencia, considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9.5 Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Domf \\ \uparrow & \text{si } x \notin Domf \end{cases}$$

9.6 Probar que la siguiente función es parcialmente computable:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x, x) + 1 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9.7 Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u, v, w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u, v, w, z) = \Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

9.8 a. Sea f la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x, y) = \psi_{h(x)}(y)$.

b. Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.

c. Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.

9.9 Probar que la siguiente función no es computable:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9.10 Probar que existe una función parcialmente computable g tal que para toda función recursiva f, f no es una extensión g. (f se dice una extensión de g si y sólo si $g(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de g.)

9.11 Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable. Qué podría decir de f cuando g es total computable?.

9.12 Probar que el conjunto $\{x \in \mathbf{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo de dos maneras distintas:

a. Usando el teorema de Rice.

b. Sin usar el teorema de Rice.

9.13 Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

a. $\{(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : y \in \text{rango de } \psi_x\}$.

b. $\{(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : \psi_x = \psi_y\}$.

c. $\{x \in \mathbf{N} : \text{rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.

9.14 Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.

9.15 Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a. Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbf{N} \backslash B$ es recursivo.

b. Si $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.

9.16 Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

9.17 Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbf{N} : \psi_x(0) = 1\}$ es recursivamente enumerable.

9.18 Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

a. $\{x \in \mathbf{N} : \psi_x(0) \downarrow\}$.

b. $\{x \in \mathbf{N} : \psi_x(x) \downarrow\}$.

c. $\{x \in \mathbf{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$.

9.19 Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango de f sea B.

9.20 Probar que $B = \{x \in \mathbf{N} : 1 \in \text{dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable.