Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 1: Lógica Proposicional

Notación: Si X es un conjunto, $\#X$ denota su cardinal; $\mathcal{F}orm$ denota el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional y $\mathcal{V}ar$ el conjunto de todas las variables proposicionales; si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, $c(\alpha)$ denota la complejidad de α y $cb(\alpha)$ la complejidad binaria de α; si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, $Var(\alpha)$ es el subconjunto de $\mathcal{V}ar$ cuyos elementos son las variables proposicionales que figuran en α y $\#VarR(\alpha)$ es el número de variables que figuran en α contadas tantas veces como aparecen.

1.– Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas del cálculo proposicional. En caso afirmativo, encontrar una cadena de formación de tales fórmulas

a) $(p_1 \vee p_2) \to p_3$
b) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$
c) $((\neg\neg p_1 \to p_1) \to p_2)$
d) $p_1 \vee (\neg p_2)$
e) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to (p_5 \to p_2))$

2.– Probar que si α es una fórmula del cálculo proposicional, entonces α admite infinitas cadenas de formación.

3.– Definir inductivamente la noción de subfórmula. Si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, llamaremos $s(\alpha)$ al conjunto de subfórmulas de α.

4.– Para cada una de las siguientes fórmulas encontrar todas las cadenas de formación minimales y enumerar su conjunto de subfórmulas

a) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$
b) $((p_1 \vee (p_5 \to p_2)) \to (\neg p_1 \to \neg p_2))$
c) $((\neg p_1 \vee p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$

5.– Mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, entonces existe $\alpha \in \mathcal{F}orm$ tal que $\#s(\alpha) = n$.

6.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces β aparece en toda cadena de formación de α.

7.–(*) Probar que si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, C es una cadena de formación minimal de α y β es un eslabón de C, entonces β es subfórmula de α.

8.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$. Probar las siguientes relaciones

a) $\#VarR(\alpha) = cb(\alpha) + 1$

b) $\#Var(\alpha) \leq cb(\alpha) + 1$

c) $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$

9.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en α las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$; llamaremos $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ a tal sustitución.

10.– Sean $\alpha, \gamma \in \mathcal{F}orm$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Diremos que α y γ son *sintácticamente equivalentes* y lo notaremos $\alpha \sim \gamma$ si existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{F}orm$ tales que β_i es una variable proposicional para todo i, $\beta_i \neq \beta_j$ si $i \neq j$, y $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \gamma$.

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}orm$.

b) Probar que si $\alpha \sim \gamma$, entonces α y γ tienen la misma longitud, la misma complejidad y la misma complejidad binaria.

11.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$. Notaremos con $\alpha_\neg$ a la expresión que se obtiene al eliminar todas las apariciones del símbolo $\neg$ en α (por ej., si $\alpha = \neg(\neg p_2 \vee p_3)$, entonces $\alpha_\neg = (p_2 \vee p_3)$).

a) Definir formalmente $\alpha_\neg$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}orm$.

b) Probar que si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, entonces $\alpha_\neg \in \mathcal{F}orm$.