# Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

## Práctica 2: Semántica del Cálculo Proposicional

**Notación**: Si $p_1, \ldots, p_n$ son las primeras $n$ variables proposicionales, $\mathcal{Form}(p_1, \ldots, p_n)$ denota el subconjunto de $\mathcal{Form}$ formado por las fórmulas $\alpha$ tales que $Var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$; $\mathcal{Val}$ es el conjunto de todas las valuaciones; $\equiv$ es la relación de equivalencia en $\mathcal{Form}$ definida por: $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$, $\forall v \in \mathcal{Val}$, y $\equiv_n$ es su restricción a $\mathcal{Form}(p_1, \ldots, p_n)$

1.– Dadas las siguientes fórmulas, decidir si son tautologías, contingencias o contradicciones:

a) $((p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)))$

b) $((p_1 \rightarrow \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_1))$

c) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$, donde $\alpha$, $\beta \in \mathcal{Form}$

d) $\neg((p_1 \rightarrow \neg p_1) \vee (\neg p_1 \rightarrow p_1))$

e) $\neg\alpha$, donde $\alpha$ es una contingencia

2.– Para cada una de las siguientes tablas de verdad, donde $p, q$ y $r$ son variables cualesquiera, encontrar una fórmula $\alpha$ que las represente:

| $p$ | $q$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

| $p$ | $q$ | $r$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

3.– Dadas las siguientes fórmulas, encontrar todas las valuaciones que las satisfagan:

a) $((p_1 \rightarrow p_2) \vee p_1)$

b) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2)$

c) $((p_1 \to p_3) \to \neg p_3)$

4.– Probar que si $\alpha$ es una fórmula satisfacible, entonces existen infinitas valuaciones que la satisfacen.

5.– Encontrar un ejemplo de una fórmula $\alpha$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, p_3\}$ y que tenga la siguiente propiedad: si $v$ es una valuación, entonces $v(\alpha) = 1$ si y sólo si $v(p_1) = 1$.

6.– Sean $\alpha \in \mathcal{Form}$, $Var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$, $v, w \in \mathcal{Val}$. Probar que si $v(p_i) = w(p_i), \forall p_i \in Var(\alpha)$ entonces $v(\alpha) = w(\alpha)$. Deducir que esto último vale entonces para toda $\alpha \in \mathcal{Form}$.

7.– Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\alpha$ y $\beta$ son tautologías, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología.

b) Si $(\alpha \to \beta)$ es tautología, entonces $\beta$ es tautología o $\alpha$ es contradicción.

c) Si $\alpha$ y $\beta$ son fórmulas, entonces $(\alpha \vee \beta)$ es contingencia si y sólo si $\alpha$ es contingencia o $\beta$ es contingencia.

d) Si $\alpha$ y $\beta$ son contingencias, entonces $(\alpha \to \beta)$ es contingencia.

e) $(\alpha \to \beta)$ es contradicción si y sólo si $\alpha$ es tautología y $\beta$ es contradicción.

8.– Sean $\alpha$, $\beta$ fórmulas tales que $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$. Probar que $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si $\alpha$ es contradicción o $\beta$ es tautología. ¿Qué sucede si $\alpha$ y $\beta$ tienen variables en común?

9.– Sean $\alpha$, $\beta \in \mathcal{Form}$. Probar que:

a) si $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia, entonces $\alpha$ es contingencia o $\beta$ es contingencia.

b) si $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$ y $\alpha$ y $\beta$ son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.

10.– (*) Buscar un ejemplo de una fórmula $\alpha$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y que tenga la siguiente propiedad: existen $2^n$ valuaciones que satisfacen a $\alpha$ y que toman el valor 0 en las variables proposicionales $p_i$, para todo $i \geq n + 1$. Más generalmente, dado un número $k$ entre 1 y $2^n$, mostrar que existe $\alpha \in \mathcal{Form}$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y tal que el número de valuaciones que satisfacen a $\alpha$ y toman el valor 0 en las variables que no figuran en $\alpha$ es igual a $k$.

11.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$ tal que $(\alpha \vee p_i)$ es tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ es contradicción para toda variable proposicional $p_i$ que aparece en $\alpha$. Probar que $\#Var(\alpha) = 1$.

12.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$ tal que toda variable proposicional figura a lo sumo una vez en $\alpha$. Probar que $\alpha$ es contingencia. Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si alguna variable proposicional aparece más de una vez en $\alpha$.

13.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Probar que $\alpha$ es tautología si y sólo si $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es tautología cualesquiera sean las fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$, donde $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ está definida en el ejercicio 9 de la práctica 1.

14.– Decidir si los siguientes conectivos son adecuados:

a) $\{\vee, \rightarrow\}$

b) $\{\vee, \wedge\}$

c) $\{\vee, \leftrightarrow\}$

d) $\{\vee, \neg\}$

e) $c(p_1, p_2, p_3)$ es el conectivo ternario definido por $c(p_1, p_2, p_3) = ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)$

15.– Sea $\mathcal{F}orm/\equiv$ el conjunto cociente asociado a la relación $\equiv$. Si $\alpha \in \mathcal{F}orm$, notamos con $[\alpha]$ la clase de equivalencia de $\alpha$. Definimos la relación $\leq$ en $\mathcal{F}orm/\equiv$ como: $[\alpha] \leq [\beta]$ si y sólo si $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología. Probar que:

a) $\leq$ está bien definida.

b) $\leq$ es una relación de orden en $\mathcal{F}orm/\equiv$.

16.– Definimos en $\mathcal{F}orm/\equiv$ las siguientes operaciones y elementos particulares:

- $[\alpha] \vee^* [\beta] = [\alpha \vee \beta]$
- $[\alpha] \wedge^* [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$
- $\neg^* [\alpha] = [\neg\alpha]$
- $\top = \{\alpha \in \mathcal{F}orm\colon \alpha \text{ es tautología}\}$
- $\bot = \{\alpha \in \mathcal{F}orm\colon \alpha \text{ es contradicción}\}$

Probar que $\langle \mathcal{F}orm/\equiv, \vee^*, \wedge^*, \neg^*, \top, \bot \rangle$ es un álgebra de Boole. Ver luego que el orden natural de este álgebra de Boole coincide con el orden definido en el ejercicio anterior.

17.– Lo mismo que el ejercicio anterior, pero ahora con $\mathcal{Form}(p_1, \ldots, p_n) / \equiv_n$. Probar además que $\mathcal{Form}(p_1, \ldots, p_n) / \equiv_n$ es finito y hallar su cardinal.

18.– Si definimos la operación $\to^*$ en $\mathcal{Form}/\equiv$ como: $[\alpha] \to^* [\beta] = [\alpha \to \beta]$, probar que $\to^*$ está bien definida, y además:

(i) $[\alpha] \to^* [\beta] = \neg^* [\alpha] \vee^* [\beta]$

(ii) $\bot \to^* [\alpha] = \top$

(iii) $[\alpha] \to^* \bot = \neg^* [\alpha]$

(iv) $\top \to^* [\alpha] = [\alpha]$

(v) $[\alpha] \to^* \top = \top$

(vi) $[\alpha] \to^* [\beta] = \top$ si y sólo si $[\alpha] \leq [\beta]$