Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 3: Consecuencia Lógica y Árboles

1.– Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles:

a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2), \neg p_2\}$

b) Γ es el conjunto de todas las variables proposicionales

c) Γ es el conjunto de todas las contingencias

d) Γ es el conjunto de todas las tautologías

2.– Decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2)\}, \alpha = p_2$

b) $\Gamma = \{p_1, (\neg p_1 \rightarrow p_2)\}, \alpha = p_2$

c) Γ es cualquier conjunto insatisfacible de fórmulas, $\alpha \in \mathcal{F}orm$ es arbitraria

d) Γ es arbitrario, α es tautología

3.– Probar las siguientes propiedades, donde $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ son conjuntos arbitrarios de fórmulas:

a) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$

b) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$

c) $C(\mathcal{F}orm) = \mathcal{F}orm$

d) si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $C(\Gamma_1) \subseteq C(\Gamma_2)$

4.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

5.– Decidir si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, donde $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathcal{F}orm$. En caso de ser falsas, hallar si alguna de las inclusiones es verdadera.

a) $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cup C(\Gamma_2)$

b) $C(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$

c) Si $C(\Gamma_1) = \Gamma_2$ y $C(\Gamma_2) = \Gamma_1$, entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$

6.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$, probar que Γ es satisfacible si y sólo si $C(\Gamma)$ es satisfacible. ¿Es cierta esta equivalencia cambiando la propiedad satisfacible por insatisfacible?

7.– Sea $*$ un conectivo binario que satisface lo siguiente, para todas $\alpha, \beta, \varphi \in \mathcal{F}orm$:

- $\alpha \models \alpha * \beta$
- $\beta \models \alpha * \beta$
- si $\alpha \models \varphi$ y $\beta \models \varphi$, entonces $\alpha * \beta \models \alpha \vee \beta$

Probar que $\alpha * \beta$ es equivalente a $\alpha \vee \beta$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{F}orm$.

8.– Encontrar un $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ satisfacible tal que para toda fórmula α, $\alpha \in C(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in C(\Gamma)$.

9.– Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}orm$. Probar que son equivalentes:

(i) $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$

(ii) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ es tautología

(iii) $[\alpha \wedge \beta] \leq [\gamma]$

(iv) $[\alpha] \rightarrow^* ([\beta] \rightarrow^* [\gamma]) = \top$

10.– Diremos de $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ es *independiente* si para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$, $\alpha \notin C(\Gamma \setminus \{\alpha\})$. En caso contrario, Γ se llama *dependiente*.

a) Probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto Γ independiente de cardinal k.

b) Dar ejemplos de conjuntos de fórmulas infinitos e independientes.

11.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$. Probar que:

a) si Γ es independiente y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces Σ es independiente.

b) si Γ contiene una tautología, entonces Γ es dependiente.

c) $C(\Gamma)$ es dependiente

12.– Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ se dice una *base* si verifica las siguientes propiedades:

i) Γ es independiente

ii) si $\Sigma \subseteq \mathcal{F}orm$ es independiente y $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $\Gamma = \Sigma$.

Probar que si $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ es finito y es una base, entonces es insatisfacible. Dar ejemplos de bases infinitas que sean satisfacibles.

13.– Probar que las siguientes fórmulas son tautologías, utilizando el método de los árboles:

a) $((p_1 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_1))$
b) $(((p_1 \to p_2) \to (p_2 \to p_1)) \to (p_2 \to p_1))$
c) $((p_1 \to p_3) \to (\neg\neg p_1 \to p_3))$

14.– Por medio del método de los árboles, decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias, y escribirlas en forma normal disyuntiva.

a) $(\neg(p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))$
b) $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)$
c) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)$

15.– Usando el método de los árboles, decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles. En caso afirmativo, encontrar una valuación que los satisfaga.

a) $\Gamma = \{(p_1 \wedge \neg p_2), (p_1 \to p_2), (\neg p_1 \to p_2)\}$
b) $\Gamma = \{p_1, p_2, (p_1 \vee \neg p_2), ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3), (\neg p_3 \to (p_1 \to p_2))\}$
c) $\Gamma = \{(p_1 \to (p_2 \to \neg p_3)), (p_1 \to (\neg p_2 \to p_3)), (p_2 \to (\neg p_1 \to p_3))\}$

16.– Decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ a través del método de los árboles:

a) $\alpha = (p_1 \wedge (p_1 \to p_0)), \Gamma = \{p_0, \neg p_0, p_1\}$
b) $\alpha = (p_1 \to p_0), \Gamma = \{p_1, (p_1 \to \neg p_0)\}$
c) $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \to p_0), \Gamma = \{p_1, (p_2 \vee p_0), (p_1 \wedge p_0)\}$

17.– Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si todo árbol de refutación de una fórmula es abierto, entonces la fórmula es una tautología.
b) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación de dicha fórmula es cerrado.
c) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación completo de dicha fórmula es cerrado.