Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 4: Compacidad

1.– Sean Γ_1, Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in C(\Gamma_1), \beta \in C(\Gamma_2)$ tales que $(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ es tautología.

2.– Probar que si $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos satisfacibles de fórmulas tales $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ es satisfacible.

3.– Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas $\alpha, \beta \in \Gamma$, se cumple que $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfacible:

a) usando el teorema de compacidad

b) sin usar el teorema de compacidad

4.– Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ el conjunto de fórmulas definido inductivamente como sigue:

- $\alpha_1 = p_1$
- $\alpha_{i+1} = (\alpha_i \vee p_{i+1})$, para $i \geq 1$.

Probar que si $\beta \in C(\Gamma)$, entonces existe un índice i tal que $\beta \in C(\{\alpha_i\})$.

5.– Sean Γ_1, Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

6.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología o $(\beta \rightarrow \alpha)$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.

7.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{F}orm$ con la propiedad de que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ. Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

8.– Sea $\alpha \in \mathcal{F}orm$ una fórmula satisfacible. Se construyen los conjuntos Γ_i inductivamente del siguiente modo:

- $\Gamma_0 = \{\alpha\}$

- $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta\}$, donde β es una fórmula que es disyunción de literales y tal que $Var(\beta) \nsubseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma_i} Var(\gamma)$

Si $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$, probar que Γ es satisfacible.

9.– Usar el ejercicio anterior para dar ejemplos de conjuntos satisfacibles infinitos.

10.– Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathcal{F}orm$. Diremos que Γ_2 es *consecuencia débil* de Γ_1 y lo notaremos $\Gamma_1 \models_D \Gamma_2$, si cada vez que una valuación v hace verdaderas a las fórmulas de Γ_1, entonces existe $\alpha \in \Gamma_2$ tal que $v(\alpha) = 1$. Diremos que Γ_2 es *consecuencia fuerte* de Γ_2 y lo notaremos $\Gamma_1 \models_F \Gamma_2$, si cada vez que una valuación v hace verdaderas a las fórmulas de Γ_1, entonces v hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ_2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\Gamma_1 \models_D \Gamma_2$, entonces existe $S \subseteq \Gamma_1$ finito tal que $S \models_D \Gamma_2$

b) Si $\Gamma_1 \models_F \Gamma_2$, entonces existe $S \subseteq \Gamma_1$ finito tal que $S \models_F \Gamma_2$

(Sugerencia: considerar el conjunto $\Gamma_1 \to \Gamma_2 = \{\alpha \to \beta : \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$ y utilizar el ejercicio 7)