Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 5: Cálculo de Predicados

1.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, un símbolo de función binario f, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones de $\mathcal{L}$ representan términos, donde x, y denotan variables. Para las que lo sean, encontrar una cadena de formación.

a) $f(c, x)$

b) $f(f(c, c))$

c) $\exists x f(x, x)$

d) $f(f(x, y), f(y, c))$

2.– Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio anterior. Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas de $\mathcal{L}$:

a) $\exists x P(x, c)$

b) $\exists x P(c, x) \vee \forall x P(x, x)$

c) $\forall f(x, x) P(x, c)$

d) $\exists x f(x)$

e) $\exists x \forall x (P(x, x) \rightarrow P(c, c))$

3.– Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio 1. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las variables libres y ligadas.

a) $\forall x \exists y P(x, y)$

b) $(\forall x P(f(x, x), y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y))$

c) $(\exists x \exists y \exists z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \wedge \forall w P(w, z))$

4.– Para cada uno de los siguientes ejemplos, determinar la propiedad que representan los enunciados dados:

a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$ donde P y Q son símbolos de predicado binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa "x es un número racional".

b) Para los siguientes enunciados, P es un símbolo de predicado unario y Q uno binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $P_I(x)$ significa "x es par", $Q_I(x,y)$ significa "x e y son coprimos".

I) $\forall x \forall y \forall z ((Q(x,y) \wedge Q(y,z)) \rightarrow Q(x,z))$
II) $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow \neg Q(x,y))$
III) $\forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$
IV) $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow \exists z (\neg Q(x,z) \wedge Q(z,y)))$

5.– Usando el lenguaje que sólo contiene la igualdad, escribir enunciado que expresen lo siguiente:

a) Existe un sólo elemento.
b) Existen al menos dos elementos.
c) Existen exactamente dos elementos.
d) Existen a lo sumo dos elementos.

6.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función f y un símbolo de constante c. Considere las interpretaciones $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ $\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q}, \cdot, 1)$. Encontrar enunciados φ y ψ tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de φ, $\mathcal{I}_2$ sea modelo de ψ y no de φ, y $\mathcal{I}_3$ no sea modelo de ψ.

7.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Sean φ y ψ los siguientes enunciados:

φ: $\forall x \exists y\, f(y) = x$

ψ: $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Hallar dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ de $\mathcal{L}$ tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de φ pero no de ψ e $\mathcal{I}_2$ sea modelo de ψ pero no de φ.

8.– Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado.

a) El orden se dice que es *denso* si y sólo si para todo $a, b \in A$ existe un $x \in A$ tal que $a < x < b$. Si se considera el lenguaje de 1er orden sin igualdad $\mathcal{L} = \{R\}$ tal que R es un símbolo de relación binario que interpreta al orden, expresar en este lenguaje la propiedad de ser orden denso.
b) Supongamos que A tiene un primer elemento a_0. Un elemento b es un *átomo* si y sólo si $a_0 < b$ y no existe ningún elemento entre ellos dos. Si se considera el lenguaje de 1er orden sin igualdad $L = \{R\}$ tal que R es un símbolo de relación binario que interpreta al orden, expresar en este lenguaje que existen exáctamente dos atomos.

9.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Encontrar enunciado φ y ψ de $\mathcal{L}$ tales que:

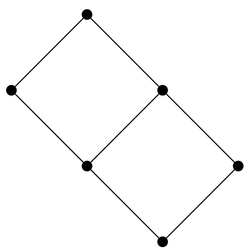
a) φ sea válido en $(\mathbb{Z}, +)$ y no en $(\mathbb{N}, +)$

b) ψ sea válido en $(\mathbb{C}, \cdot)$ y no en $(\mathbb{R}, \cdot)$

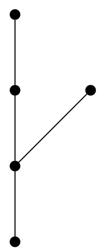
10.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Considerar las interpretaciones $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{N}, \cdot)$ y probar que el 1 es un elemento distinguido en ambas.

11.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario. Probar que todos los elementos del universo de las siguientes interpretaciones son distinguibles:

a)



b)



12.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de función binario y <u>sin</u> igualdad. Consideremos una interpretación $\langle A, \leq \rangle$, un conjunto totalmente ordenado y finito. Probar que todos los elementos de A son distinguibles.