Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 6: Árboles del Cálculo de Predicados

1.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado unario P. Decidir si las siguientes fórmulas son equivalentes:

α: $\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

β: $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z P(z,x))$

2.– Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado unario P, uno binario Q y un símbolo de función unario f. Probar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a) $(\exists y P(y) \rightarrow \forall x \exists y P(y))$

b) $(\exists y P(y) \rightarrow \exists y \exists x P(y))$

c) $(\forall x P(x) \rightarrow P(t))$, donde t es un término sin variables.

d) $(\forall x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall y Q(y,y))$

e) $(P(t) \rightarrow \exists x P(x))$, donde t es un término sin variables.

f) $(\forall x Q(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y Q(x,y))$

3.– Probar que si φ es un enunciado universalmente válido, entonces $\forall x \varphi$ también lo es.

4.– Probar que si φ y $(\varphi \rightarrow \psi)$ son enunciados universalmente válidos, entonces ψ también lo es.

5.– Introducir reglas de expansión de árboles para el conectivo $\leftrightarrow$ y demostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a) $(\forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y))$

b) $(\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y P(y)) \leftrightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow \exists y P(y)))$

6.– Usando árboles de refutación, decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a) $\Gamma = \{\forall x \exists y P(x,y)\}, \alpha = \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\Gamma = \{\exists y \forall x P(x,y)\}, \alpha = \forall x \exists y P(x,y)$

7.– Analizar si α y β son equivalentes:

a) $\alpha = \neg\forall x\varphi(x), \beta = \exists x\neg\varphi(x)$

b) $\alpha = \forall x\varphi(x), \beta = \neg\exists x\neg\varphi(x)$

8.– Decidir si las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a) $\forall x\exists y\forall z\exists w(P(x,y) \vee \neg P(z,w))$

b) $((\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge (\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)))) \to \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x)))$

9.– Sean las fórmulas:

$\alpha_1 : \forall x\forall y\forall z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))$

$\alpha_2 : \forall x\forall y(P(x,y) \to P(y,x))$

$\alpha_3 : \forall x\exists yP(x,y)$

$\alpha_4 : \forall xP(x,x)$

a) Estudiar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \alpha_4$

b) Estudiar si $\{\alpha_1, \alpha_3\} \models \alpha_4$

10.– Probar lo siguiente:

$$\{\forall x\forall y\forall z(P(x,y,z) \to P(y,x,z)), \exists x\forall y\exists zP(y,z,x)\} \models \exists x\forall y\exists zP(z,y,x)$$

11.– En los siguientes casos, decidir si $\Gamma \models \alpha$.

a) $\Gamma = \{\forall x\forall y((R(x,y) \wedge R(y,x)) \to (x = y)), \forall x\forall y(R(x,y) \to R(y,x))\}$,
$\alpha : \forall x\forall y(R(x,y) \to (x = y))$

b) $\Gamma = \{\exists y\forall xP(x,y), \forall x\forall y(P(x,y) \to P(x,c))\}, \alpha : P(c,c)$