Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 8: Funciones Primitivas Recursivas

1.– Sean las funciones $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Analizar si las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva:

a) $f(x, 0) = 17$
$f(x, y+1) = f(0, \varphi(x, y))$

b) $f(x, 0) = \psi(x)$
$f(x, y+1) = f(x, y) + \varphi(x, y)$

c) $f(x, 0) = \varphi(0, x)$
$f(x, y+1) = \varphi(f(x, y), y+1)$

Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

2.– Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva:

a)
$$\text{máx}(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$$

b)
$$\text{mín}(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

c)
$$\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

d)
$$\text{hf}(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$$

e)
$$\text{sqrt}(x) = \left[\sqrt{x}\right]$$

f)
$$\text{psq}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = n^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.– Mostrar que las siguientes funciones son primitivas recursivas:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ x^y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1^1 \\ f(2) &= 2^{2^2} \\ &\vdots \\ f(n) &= \underbrace{n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}}_{n+1 \text{ veces}} \end{aligned}$$

4.– Sean $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funciones primitivas recursivas. Mostrar que las siguientes funciones también son primitivas recursivas:

a) La función f_1 definida como:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= \psi(1) = \psi^1(1) \\ f(2) &= \psi(\psi(2)) = \psi^2(2) \\ &\vdots \\ f(n) &= \underbrace{\psi(\psi(\ldots(\psi}_{n \text{ veces}}(n))\ldots)) = \psi^n(n) \end{aligned}$$

b) La función f_2 definida como:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \psi(0) \\ f_1(1) &= \psi(\psi(1)+1)) + 1 \\ &\vdots \\ f_1(x) &= \underbrace{\psi(\psi(\ldots(\psi}_{x+1 \text{ veces}}(x)+1)\ldots)+1)+1 \end{aligned}$$

c) La función f_3 definida como:

$$\begin{aligned}
f_2(x,0) &= \varphi(x,0)\\
f_2(x,1) &= \varphi(\varphi(x,1),0)\\
&\ \vdots\\
f_2(x,y) &= \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots(\varphi}_{y+1 \text{ veces}}(x,y),y-1),y-2)\ldots 2),1),0)
\end{aligned}$$

5.– Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiva recursiva. Ver que las siguientes funciones son primitivas recursivas, utilizando definiciones por sumas y/o productos acotados:

a)

$$f(x) = \#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq x, g(i) > 3\}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, x \leq i \leq y \text{ vale que } g(i+1) > g(i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c)

$$f(x,y,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y además } w = \max\{g(x), g(x+1), \ldots, g(y)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6.– Sean $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $b, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funciones primitivas recursivas. En los siguientes casos, ver que la función f es primitiva recursiva (se dice que f se obtiene a partir de g por una operación de "máximo acotado"):

a) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \max\limits_{0 \leq i \leq y} g(x_1, \ldots, x_n, i)$

b) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \max\limits_{b(y) \leq i \leq t(y)} g(x_1, \ldots, x_n, i) & \text{si } b(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{si } b(y) > t(y) \end{cases}$

7.– Sea la función h definida por: $h(n)$ es el $(n+1)$-ésimo dígito significativo en la representación decimal de $\sqrt{2}$. Así, $h(0) = 1, h(1) = 4, h(2) = 1, h(3) = 4$, etc. Probar que h es primitiva recursiva.
(Sugerencia: considerar la función auxiliar g, con $g(n)$ el número natural representado por los primeros $n+1$ dígitos de la representación de $\sqrt{2}$. Así, $g(0) = 1, g(1) = 14, g(2) = 141, g(3) = 1414$, etc. Usar minimización acotada para probar que g es primitiva recursiva)

8.– Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas:

a)
$$\mathrm{shr}(x, n) = \left[\frac{x}{2^n}\right]$$

b)
$$\mathrm{lg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ [\log_2 x] + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) $\mathrm{dig}(x, n) =$ el n-ésimo dígito en la representacion binaria de x, contando desde la derecha y comenzando por 0. Por ejemplo, $(13)_2 = 1101$ y entonces $\mathrm{dig}(13, 0) = 1$, $\mathrm{dig}(13, 1) = 0$, $\mathrm{dig}(13, 2) = 1$, $\mathrm{dig}(13, 3) = 1$, $\mathrm{dig}(13, 4) = 0$, etc.

d) $\mathrm{wgt}(x) =$ el número de unos en la representación binaria de x

e) $\mathrm{ld}(x) =$ el último dígito en la representación decimal de x

f) $\mathrm{fd}(x) =$ el primer dígito en la representación decimal de x

g) $\mathrm{Pr}(x, y) =$ la cantidad de primos entre x e y

h) $\mathrm{G}(x, y) = f^y(x)$, con f una función primitiva recursiva