Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 9: Recursividad

1.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva y computable. Demostrar que f^{-1} es computable.

2.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definimos la *función característica del gráfico de f* como:

$$\mathrm{Gr}_f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

Probar que f es recursiva si y sólo si Gr_f es recursiva.

3.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva y suryectiva. Probar que existe una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva e inyectiva tal que $g(f(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{N}$.

4.– Probar que $\mathrm{Halt}(x, x)$ no es computable.

5.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva y biyectiva. Probar que $\mathrm{Halt}(f(x), x)$ no es computable.
(Sugerencia: considerar

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x, f^{-1}(x)) \downarrow \end{cases}$$

6.– Sea f computable. Investigar si la siguiente función es computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{Dom}\, f \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7.– Probar que la siguiente función es computable:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x,x) + 1 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8.– Probar que la siguiente función no es computable:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } y\in \operatorname{Im}\Phi_x\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

9.– Si f es recursiva, decimos que f es *extensible* si existe g recursiva y **total** tal que $g(x)=f(x)$ para todo $x\in \operatorname{Dom} f$. Probar que existe una función recursiva que no es extensible.

10.– Probar que el conjunto $A=\{x\in\mathbb{N} : \Phi_x(x)\downarrow \wedge \Phi_x(x)=2x\}$ no es recursivo.

11.– Probar que existe una función primitiva recursiva $g(u,v,w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u,v,w,z)=\Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

12.– Probar que existe una función primitiva recursiva $f(n,m)$ tal que $\Phi_n(x)+\Phi_m(x)=\Phi_{f(n,m)}(x)$.

13.– Probar que el conjunto $\{x\in\mathbb{N} : \operatorname{Dom}\Phi_x=\emptyset\}$ no es recursivo de dos maneras:

a) Usando el teorema de Rice

b) Sin usar el teorema de Rice

14.– Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : y\in\operatorname{Im}\Phi_x\}$

b) $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \Phi_y=\Phi_x\}$

c) $\{x\in\mathbb{N} : \operatorname{Im}\Phi_x \text{ es infinito}\}$

15.– Probar que las siguientes funciones no son recursivas:

a)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } \Phi_x(x)=0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

b)

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } \Phi_y(y)\neq\Phi_x(y)\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

c)

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1 & \text{si } \Phi_y(x)=\Phi_z(x)\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

16.– Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un conjunto recursivo infinito.

17.– Probar si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas:

a) Si A y B son recursivamente enumerables, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son recursivamente enumerables.

b) Si A y B son recursivamente enumerables, entonces $A \setminus B$ es recursivamente enumerable.

c) Si B es recursivamente enumerable y $A \subseteq B$, entonces A es recursivamente enumerable.

d) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \setminus B$ es recursivo.

e) Si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos recursivamente enumerable, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ es recursivamente enumerable.

18.– Demostrar que si B es recursivamente enumerable y f es computable, entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

19.– Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(0) = 1\}$ es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

20.– Investigar si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables y/o recursivos:

a) $\{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(0) \downarrow\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(x) \downarrow\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} : \mathrm{Dom}\, \Phi_x = \emptyset\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \in \mathrm{Dom}\, \Phi_x\}$

21.– Probar que B es recursivamente enumerable si y sólo si existe una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable tal que $\mathrm{Im}\, f = B$.

22.– Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y computable tal que $\mathrm{Im}\, f = B$.

23.– Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \Phi_x \text{ es una función total}\}$ no es recursivamente enumerable. (Sugerencia: Por el ejercicio 21 existe una f total tal que $B = \mathrm{Im}\, f$, considerar la función $g(x) = \Phi(x, f(x)) + 1$)

24.– Probar que $A = \{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(x) \neq x\}$ no es recursivo utilizando el teorema de recursión.

(Sugerencia: considerar

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in A \\ y+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y aplicar el teorema)