

Lógica y Computabilidad

Curso de Verano 2005

Práctica 3: Consecuencia Lógica y Árboles

- 1.- Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles:
 - a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2), \neg p_2\}$
 - b) Γ es el conjunto de todas las variables proposicionales
 - c) Γ es el conjunto de todas las contingencias
 - d) Γ es el conjunto de todas las tautologías

- 2.- Decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ en los siguientes casos:
 - a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2)\}, \alpha = p_2$
 - b) $\Gamma = \{p_1, (\neg p_1 \rightarrow p_2)\}, \alpha = p_2$
 - c) Γ es cualquier conjunto insatisfacible de fórmulas, $\alpha \in \mathcal{Form}$ es arbitraria
 - d) Γ es arbitrario, α es tautología

- 3.- Probar las siguientes propiedades, donde $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ son conjuntos arbitrarios de fórmulas:
 - a) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$
 - b) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$
 - c) $C(\mathcal{Form}) = \mathcal{Form}$
 - d) si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $C(\Gamma_1) \subseteq C(\Gamma_2)$

- 4.- Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

- 5.- Decidir si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, donde $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathcal{Form}$. En caso de ser falsas, hallar si alguna de las inclusiones es verdadera.
 - a) $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cup C(\Gamma_2)$
 - b) $C(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$
 - c) Si $C(\Gamma_1) = \Gamma_2$ y $C(\Gamma_2) = \Gamma_1$, entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$

6.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$, probar que Γ es satisfacible si y sólo si $C(\Gamma)$ es satisfacible. ¿Es cierta esta equivalencia cambiando la propiedad satisfacible por insatisfacible?

7.– Encontrar un $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$ satisfacible tal que para toda fórmula α , $\alpha \in C(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in C(\Gamma)$.

8.– Diremos de $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$ es *independiente* si para toda fórmula α , $\alpha \notin C(\Gamma \setminus \{\alpha\})$. En caso contrario, Γ se llama *dependiente*.

- a) Probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto Γ de cardinal k .
- b) Dar ejemplos de conjuntos de fórmulas infinitos e independientes.

9.– Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$. Probar que:

- a) si Γ es independiente y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces Σ es independiente.
- b) si Γ contiene una tautología, entonces Γ es dependiente.
- c) $C(\Gamma)$ es dependiente

10.– Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$ se dice una *base* si verifica las siguientes propiedades:

- i) Γ es independiente
- ii) si $\Sigma \subseteq \mathcal{Form}$ es independiente y $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $\Gamma = \Sigma$.

Probar que si $\Gamma \subseteq \mathcal{Form}$ es finito y es una base, entonces es insatisfacible. Dar ejemplos de bases infinitas que sean satisfacibles.

11.– Probar que las siguientes fórmulas son tautologías, utilizando el método de los árboles:

- a) $((p_1 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$
- b) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
- c) $((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (\neg\neg p_1 \rightarrow p_3))$

12.– Por medio del método de los árboles, decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias, y escribirlas en forma normal disyuntiva.

- a) $(\neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \rightarrow p_3)))$
- b) $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4)$
- c) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$

13.– Usando el método de los árboles, decidir si los siguientes conjuntos son

satisfacibles. En caso afirmativo, encontrar una valuación que los satisfaga.

- a) $\Gamma = \{(p_1 \wedge \neg p_2), (p_1 \rightarrow p_2), (\neg p_1 \rightarrow p_2)\}$
- b) $\Gamma = \{p_1, p_2, (p_1 \vee \neg p_2), ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3), (\neg p_3 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))\}$
- c) $\Gamma = \{(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow \neg p_3)), (p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow p_3)), (p_2 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_3))\}$

14.- Decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ a través del método de los árboles:

- a) $\alpha = (p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_0)), \Gamma = \{p_0, \neg p_0, p_1\}$
- b) $\alpha = (p_1 \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow \neg p_0)\}$
- c) $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0), \Gamma = \{p_1, (p_2 \vee p_0), (p_1 \wedge p_0)\}$

15.- Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Si todo árbol de refutación de una fórmula es abierto, entonces la fórmula es una tautología.
- b) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación de dicha fórmula es cerrado.
- c) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación completo de dicha fórmula es cerrado.