

Lógica y Computabilidad

Curso de Verano 2005

Práctica 5: Cálculo de Predicados

1.– Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P , un símbolo de función binario f , y un símbolo de constante c . Decidir cuáles de las siguientes expresiones de \mathcal{L} representan términos, donde x, y denotan variables. Para las que lo sean, encontrar una cadena de formación.

- a) $f(c, x)$
- b) $f(f(c, c))$
- c) $\exists x f(x, x)$
- d) $f(f(x, y), f(y, c))$

2.– Sea \mathcal{L} el lenguaje del ejercicio anterior. Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas de \mathcal{L} :

- a) $\exists x P(x, c)$
- b) $\exists x P(c, x) \vee \forall x P(x, x)$
- c) $\forall f(x, x) P(x, c)$
- d) $\exists x f(x)$
- e) $\exists x \forall x (P(x, x) \rightarrow P(c, c))$

3.– Sea \mathcal{L} el lenguaje del ejercicio 1. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las variables libres y ligadas.

- a) $\forall x \exists y P(x, y)$
- b) $(\forall x P(f(x, x), y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y))$
- c) $(\exists x \exists y \exists z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \wedge \forall w P(w, z))$

4.– Para cada uno de los siguientes ejemplos, determinar la propiedad que representan los enunciados dados:

- a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$ donde P y Q son símbolos de predicado binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa “ x es un número racional”.
- b) Para los siguientes enunciados, P es un símbolo de predicado unario

y Q uno binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $P_I(x)$ significa “ x es par”, $Q_I(x, y)$ significa “ x e y son coprimos”.

- I) $\forall x \forall y \forall z ((Q(x, y) \wedge Q(y, z)) \rightarrow Q(x, z))$
- II) $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow \neg Q(x, y))$
- III) $\forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y))$
- IV) $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow \exists z (\neg Q(x, z) \wedge Q(z, y)))$

5.– Usando el lenguaje que sólo contiene la igualdad, escribir enunciado que expresen lo siguiente:

- a) Existe un sólo elemento.
- b) Existen al menos dos elementos.
- c) Existen exactamente dos elementos.
- d) Existen a lo sumo dos elementos.

6.– Sea \mathcal{L} un lenguaje con igualdad, un símbolo de función f y un símbolo de constante c . Considere las interpretaciones $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q}, \cdot, 1)$. Encontrar enunciados φ y ψ tales que \mathcal{I}_1 sea modelo de φ , \mathcal{I}_2 sea modelo de ψ y no de φ , y \mathcal{I}_3 sea modelo de ψ .

7.– Sea \mathcal{L} un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f . Sean φ y ψ los siguientes enunciados:

$$\varphi: \forall x \exists y f(y) = x$$

$$\psi: \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

Hallar dos interpretaciones \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 de \mathcal{L} tales que \mathcal{I}_1 sea modelo de φ pero no de ψ e \mathcal{I}_2 sea modelo de ψ pero no de φ .

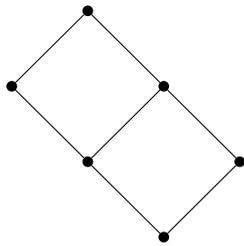
8.– Sea \mathcal{L} un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Encontrar enunciado φ y ψ de \mathcal{L} tales que:

- a) φ sea válido en $(\mathbb{Z}, +)$ y no en $(\mathbb{N}, +)$
- b) ψ sea válido en (\mathbb{C}, \cdot) y no en (\mathbb{R}, \cdot)

9.– Sea \mathcal{L} un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Considerar las interpretaciones $(\mathbb{N}, +)$ y (\mathbb{N}, \cdot) y probar que el 1 es un elemento distinguido en ambas.

10.– Sea \mathcal{L} un lenguaje con un símbolo de predicado binario. Probar que todos los elementos del universo de las siguientes interpretaciones son distinguibles:

a)



b)

