Lógica y Computabilidad

Curso de Verano 2005

Práctica 7: Computabilidad y Programas

Terminología: en esta práctica y en las siguientes, una *función* es una *función aritmética parcial*, es decir, una $f : Dom(f) \to \mathbb{N}$, con $Dom(f) \subseteq \mathbb{N}^k$, para algún natural k; si $Dom(f) = \mathbb{N}^k$, decimos que f es *total*; un *predicado* es una función $P : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$ **total**; decimos que un programa computa una función f si para cada $x \in \mathbb{N}$ donde f está definida, el programa devuelve $f(x)$ con input x, y para cada $y \in \mathbb{N}$ donde f no está definida, el programa se cuelga con input y; si f es una función y existe un programa escrito en el lenguaje $\mathscr{S}$ que computa f, decimos entonces que f es *computable* o *recursiva*.

1.– Escribir en $\mathscr{S}$ programas que computen las siguientes funciones:

a) el producto: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, usando la suma como macro

b) la potenciación: $f(x_1, x_2) = {x_1}^{x_2}$, usando el producto como macro

2.– Mostrar en $\mathscr{S}$ un programa que compute la función vacía $\emptyset : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, es decir, la función que no está definida en ningún punto.

3.– Escribir en $\mathscr{S}$ programas que computen los siguientes predicados:

a)
$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

b)
$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

c)
$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

d)

$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

4.– Demostrar que $\mathscr{S}$ cumple lo siguiente:

a) Las siguientes funciones son computables:

i) la función sucesor $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, suc(x) = x + 1$

ii) las proyecciones $u_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

iii) las funciones constantes $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, c_k(x) = k$

b) Si $f, g_1, \ldots, g_k$ son computables con $Dom(f) \subseteq \mathbb{N}^k$ y $Dom(g_i) \subseteq \mathbb{N}^r, \forall i$, entonces la composición h es computable:

$$h(x_1, \ldots, x_r) = f(g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_r))$$

¿Cuál es el dominio de h?

c) La función de decisión $d : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ es computable:

$$d(x, y, s, t) = \begin{cases} s & \text{si } x = y \\ t & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

5.– Escribir programas en $\mathscr{S}$ que computen las siguientes funciones:

a)

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

c) $f(x) =$ el mayor número natural n tal $2 \cdot n \leq x$

d)

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ es múltiplo de } x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

6.– Escribir programas que computen el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

7.– Si $P(x)$ es un predicado computable, probar que la siguiente función es computable:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } P(x+y) \text{ es verdadero} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

8.– Sean $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $b, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funciones computables, escribir programas que computen las siguientes funciones:

a) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \max\limits_{0 \leq i \leq y} g(x_1, \ldots, x_n, i)$

b) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \max\limits_{b(y) \leq i \leq t(y)} g(x_1, \ldots, x_n, i) & \text{si } b(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{si } b(y) > t(y) \end{cases}$

9.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva y computable. Demostrar que f^{-1} es computable.