

Lógica y Computabilidad

Curso de Verano 2005

Práctica 8: Funciones Primitivas Recursivas

1.– Sean las funciones $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ y $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Analizar si las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva:

- a) $f(x, 0) = 17$
 $f(x, y + 1) = f(0, \varphi(x, y))$
- b) $f(x, 0) = \psi(x)$
 $f(x, y + 1) = f(x, y) + \varphi(x, y)$
- c) $f(x, 0) = \varphi(0, x)$
 $f(x, y + 1) = \varphi(f(x, y), y + 1)$

Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

2.– Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva:

a)

$$\text{máx}(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$$

b)

$$\text{mín}(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

c)

$$\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

d)

$$\text{hf}(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

e)

$$\text{sqrt}(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

f)

$$\text{psq}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = n^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.– Sean $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ y $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funciones primitivas recursivas. Mostrar que las siguientes funciones también son primitivas recursivas:

a) La función f_1 definida como:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \psi(0) \\ f_1(1) &= \psi(\psi(1) + 1) + 1 \\ &\vdots \\ f_1(x) &= \underbrace{\psi(\psi(\dots(\psi(x) + 1)\dots) + 1)}_{x+1 \text{ veces}} + 1 \end{aligned}$$

b) La función f_2 definida como:

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= \varphi(x, 0) \\ f_2(x, 1) &= \varphi(\varphi(x, 1), 0) \\ &\vdots \\ f_2(x, y) &= \underbrace{\varphi(\dots(\varphi(x, y), y - 1), y - 2)\dots 2, 1, 0)}_{y+1 \text{ veces}} \end{aligned}$$

4.– Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiva recursiva. Ver que las siguientes funciones son primitivas recursivas, utilizando definiciones por sumas y/o productos acotados:

a)

$$f(x) = \#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq x, g(i) > 3\}$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, x \leq i \leq y \text{ vale que } g(i+1) > g(i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c)

$$f(x, y, w) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y además } w = \text{máx}\{g(x), g(x+1), \dots, g(y)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5.– Sean $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, $b, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funciones primitivas recursivas. En los siguientes casos, ver que la función f es primitiva recursiva (se dice que f se obtiene a partir de g por una operación de “máximo acotado”):

a) $f(x_1, \dots, x_n, y) = \text{máx}_{0 \leq i \leq y} g(x_1, \dots, x_n, i)$

$$b) f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \max_{b(y) \leq i \leq t(y)} g(x_1, \dots, x_n, i) & \text{si } b(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{si } b(y) > t(y) \end{cases}$$

6.- Sea la función h definida por: $h(n)$ es el $(n + 1)$ -ésimo dígito significativo en la representación decimal de $\sqrt{2}$. Así, $h(0) = 1, h(1) = 4, h(2) = 1, h(3) = 4$, etc. Probar que h es primitiva recursiva.

(Sugerencia: considerar la función auxiliar g , con $g(n)$ el número natural representado por los primeros $n + 1$ dígitos de la representación de $\sqrt{2}$. Así, $g(0) = 1, g(1) = 14, g(2) = 141, g(3) = 1414$, etc. Usar minimización acotada para probar que g es primitiva recursiva)

7.- Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas:

a)

$$\text{shr}(x, n) = \left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor$$

b)

$$\text{lg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lceil \log_2 x \rceil + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) $\text{dig}(x, n)$ = el n -ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando por 0. Por ejemplo, $(13)_2 = 1101$ y entonces $\text{dig}(13, 0) = 1, \text{dig}(13, 1) = 0, \text{dig}(13, 2) = 1, \text{dig}(13, 3) = 1, \text{dig}(13, 4) = 0$, etc.

d) $\text{wgt}(x)$ = el número de unos en la representación binaria de x

e) $\text{ld}(x)$ = el último dígito en la representación decimal de x

f) $\text{fd}(x)$ = el primer dígito en la representación decimal de x

g) $\text{Pr}(x, y)$ = la cantidad de primos entre x e y

h) $\text{G}(x, y) = f^n(m)$, con f una función primitiva recursiva