Lógica y computabilidad

Práctica 1

1) Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A_1 = \{*, \sim\}$ mediante las siguientes reglas:

i) $*$ es una palabra.

ii) Si X es una palabra, entonces $\sim X$ y $*X$ también lo son.

iii) X es una palabra si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

a) Escribir cinco expresiones de $\mathcal{L}_1$ que no sean palabras, y cinco que sí lo sean.

b) Presentar, si es posible, un método para decidir en un número finito de pasos, si una expresión dada de $\mathcal{L}_1$ es o no una palabra.

2) Sea $A = \{a, b, c\}$, $S = \{\circ, \clubsuit\}$ con $A \cap S = \emptyset$. Sea $\Sigma = A \cup S$.
Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

i) La expresión vacía (notada β) pertenece a $\mathcal{L}$.

ii) Si $x \in A$ entonces x es una palabra.

iii) Si α es una palabra, las expresiones $\circ\alpha\clubsuit$ también lo son.

iv) Si α es una palabra y $x \in A$, las expresiones $x\alpha$ y αx son palabras.

v) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) a iv).

Se define el peso de una expresión como el número de $\circ$ que aparecen en la expresión menos el número de $\clubsuit$ que aparecen en la expresión. Probar que las palabras de $\mathcal{L}$ son expresiones de peso 0.¿ Es toda expresión de peso 0 una palabra?. Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.

3) Sea A un conjunto finito y sea $S \subseteq A$ un subconjunto no vacío y diferente de A. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje definido como sigue.

i) Si $a \in A \backslash S$, entonces a es una palabra.

ii) Si $s \in S$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ son palabras, entonces $sx_1 \ldots x_n s$ es una palabra.

iii) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) o ii).

a) Probar que si α es una palabra, entonces el número de elementos de S que figura en α es un número par.

b) Probar que si $s, t \in S, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ son palabras tales que $sx_1, \ldots, x_n s = ty_1, \ldots, y_m t$, entonces $n = m$, $s = t$ y $x_1 = y_1$,$\ldots$,$x_n = y_n$.

c) Sean α, β palabras y sea β' la expresión que se obtiene sustituyendo todas las apariciones de elementos de A en β por α. Por ejemplo, si $\beta = sas$ con $s \in S$ y $a \in A$, entonces $\beta' = s\alpha s$. Probar que β' es una palabra.

4) Sea $X = \{x, |, f(,)\}$. Definimos el siguiente lenguaje $\mathcal{L} \subseteq X^*$.

i) x_i es una palabra para todo $i \in \mathbf{N}$, donde x_i es la expresión x seguida de i barras. Estas palabras serán llamadas variables y será denotado por V.

ii) Si t y t' son palabras, entonces $f(t, t')$ es una palabra.

iii) Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas i) o ii).

a) Si t_1, t_2, t_3, t_4 son palabras tales que $f(t_1, t_2) = f(t_3, t_4)$, entonces $t_1 = t_3$ y $t_2 = t_4$.

b) Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿ son necesariamente iguales?.

c) Una *valuación* es una función $v : \mathcal{L} \to \mathbf{N}$ tal que $v(f(t, t')) = v(t) + v(t')$ para todo par de palabras t, t'. Probar que si $g : V \to \mathbf{N}$ es una función, entonces existe una valuación $v : \mathcal{L} \to \mathbf{N}$ que extiende a g.

Dos palabras t y t' se dicen *equivalentes* si $v(t) = v(t')$ para toda valuación v.

d) Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿ son equivalentes?.

e) Si dos términos son equivalentes, ¿ tienen las mismas variables?.

5) Sea A un conjunto finito y no vacío y sea $\mathcal{L} \subseteq A^*$ un lenguaje. Si n es un número natural mayor que 1, una palabra p de $\mathcal{L}$ se dice *n-irreducible* si no existen n palabras $x_1, \ldots, x_n$ tales que $p = x_1 \ldots x_n$. Una palabra p se dice *irreducible* si es irreducible para todo $n > 1$.

a) Probar que si $n > 1$ y p es una palabra entonces existen k palabras $x_1, \ldots, x_k$ tales que $p = x_1 \ldots x_k$ y x_j es n-irreducible para todo j entre 1 y k. ¿Es única la representación?.
b) En cada uno de lo ejercicios anteriores encontrar la palabras n-irreducibles para cada $n > 1$.

6) Sea $\mathcal{P}$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A = \{p, |, C, B, L, N\}$, donde las palabras son llamadas fórmulas, y la siguiente gramática:

i) p_i es una fórmula para todo $i \in \mathbf{N}$.

ii) Si X es una fórmula, entonces NX es una fórmula.

iii) Si X, Y son fórmulas, entonces $*XY$ también lo son, con $* \in \{C, B, L\}$.

iv) X es una fórmula si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

Donde $p_0 = p, p_1 = p|, \ldots, p_i$ es la expresión p seguida de i barras.

Este lenguaje es conocido como el lenguaje correspondiente a la *notación polaca*.

a) Decidir si las siguientes expresiones de $\mathcal{P}$ son fórmulas:

a1) $Cp_1Cp_2p_1$.

a2) $CCp_1p_2CCp_2p_3Cp_1p_3$.

a3) $CCCp_1p_2p_2CCp_2p_1p_1$.

a4) $CCNp_1Np_2Cp_2p_1$.

a5) $Np_1CNp_1Cp_1p_2$.

a6) $Np_1p_2Cp_1p_2$.

a7) p_2Cp_1.

a8) Np_1Cp_2.

b) Se define el peso de la expresión X, $p(X)$, como el número de ocurrencias de C en X más el número de ocurrencias de B en X más el número de ocurrencias de L en X menos el número de ocurrencias de las variables proposicionales en X. Calcular el peso de las expresiones de a).

c) Demostrar que si X es una fórmula, entonces $p(X) = -1$. Decidir si vale la recíproca.

d) Demostrar que si P, Q, R, S son fórmulas y $*, \circ \in \{C, B, L\}$ son tales que $*PQ = \circ RS$, entonces $* = \circ, P = R$ y $Q = S$.

e) Sean $\mathcal{L}$ el lenguaje del cálculo proposicional, F el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, G el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$, E el conjunto de expresiones de $\mathcal{L}$ y EP el conjunto de expresiones de $\mathcal{P}$.
Se define una función de traducción $T : G \rightarrow E$ de la siguiente forma: si $X, Y \in G$ entonces:

i) $T(p_i) = p_i$ para todo $i \in \mathbf{N}$.

ii) $T(NX) = \neg T(X)$.

iii) $T(CXY) = (T(X) \rightarrow T(Y))$.

iv) $T(BXY) = (T(X) \vee T(Y))$.

v) $T(LXY) = (T(X) \wedge T(Y))$.

Traducir todas las fórmulas de a).

f) Probar que si $X \in G$, entonces $T(X) \in F$.

g) Definir una función de traducción T_1 de F en EP de modo que si $X \in F$ entonces $T(X) \in G$.

Lenguaje del cálculo proposicional

En los ejercicios siguientes, $c(\alpha)$ denotará el grado de complejidad de una fórmula α, $l^*(\alpha)$ la longitud modificada de α y $\bar{l}(\alpha)$ la *longitud standard* de α que se define inductivamente como sigue: $\bar{l}(p_i) = 1$ para toda variable proposicional p_i, $\bar{l}(\neg\alpha) = 1 + \bar{l}(\alpha)$ y $\bar{l}((\alpha \circ \beta)) = \bar{l}(\alpha) + \bar{l}(\beta) + 3$ para todo conectivo binario $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

7) Para cada una de las siguientes fórmulas del cálculo proposicional, encontrar dos cadenas de formación de modo tal que en todo eslabón de cada una de las cadenas encontradas, no aparezcan variables proposicionales diferentes de las que figuren en la fórmula dada.

a) $((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_2)$
b) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$
c) $(p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3))$.

8) Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sea $X_1X_2\ldots X_n$ una cadena de formación de α. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$ tal que $X_i = \beta$.

9) Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para todo par de subfórmulas β y γ de α, β es subfórmula de γ o γ es subfórmula de β.

b) Existe una cadena de formación $X_1X_2\ldots X_n$ de α tal que X_i es subfórmula de X_{i+1} para todo $1 \leq i \leq n-1$.

10) Sea α una fórmula del cálculo proposicional que satisface la condición a) del ejercicio anterior. Probar que en α figura solamente una variable proposicional. ¿ Vale la recíproca?. Es decir, si α tiene una sola variable proposicional, ¿ Se cumple a)?.

11)

a) Sea α una fórmula del cálculo proposicional tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.

b) Sean k, n números naturales tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si α es una fórmula del cálculo proposicional tal que $c(\alpha) = n$, ¿ existe una subfórmula de α que tenga grado de complejidad k?.

12) Una fórmula del cálculo proposicional se dice *binaria* si el símbolo de negación no figura en dicha fórmula.

a) Hallar todos los números naturales n tales que existe una fórmula binaria α de longitud standard n.

b) Encontrar una fórmula que relacione el grado de complejidad de una fórmula binaria con su longitud standard.

13) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una sucesión de fórmulas del cálculo proposicional. Si β es una expresión del cálculo proposicional, definimos $s(\beta)$ a la expresión que se obtiene de reemplazar en β la $i-$ ésima variable proposicional p_i por la fórmula α_i, en el caso que p_i figure en β.

a) Definir formalmente $s(\beta)$ para toda expresión β.

b) Probar que si β es una fórmula, entonces $s(\beta)$ es una fórmula.

14) Dos fórmulas α y β del cálculo proposicional se dicen *sintácticamente equivalentes*, y se nota $\alpha \sim \beta$, si existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de fórmulas del cálculo proposicional tal que α_i es una variable proposicional para todo i y $s(\beta) = \alpha$, donde $s(\beta)$ es la expresión del ejercicio anterior.

a) Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional.

b) Probar que si $\alpha \sim \beta$, entonces α y β tienen la misma longitud standard, la misma longitud modificada y el mismo grado de complejidad.

15) Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Sea $\alpha_\neg$ a la expresión que se obtiene de eliminar el símbolo de negación en α. Por ejemplo, si $\alpha = (p_1 \rightarrow \neg p_2)$, entonces $\alpha_\neg = (p_1 \rightarrow p_2)$.

a) Definir formalmente $\alpha_\neg$ para toda fórmula α.

b) Probar que si α es una fórmula, entonces $\alpha_\neg$ es también una fórmula.

16) Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Probar que $c(\alpha) < \bar{l}(\alpha)$. Probar también que $c(\alpha)+1 = \bar{l}(\alpha)$ si y sólo si α es una variable proposicional o bien $\neg$ es el único conectivo que figura en α.

17) Establecer resultados análogos a los ejercicios 12) y 16) para la longitud modificada l^*.

18) Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sean β_1, β_2 subfórmulas de α diferentes de α.

a) Probar que si α es binaria (ver Ejercicio 12), entonces $c(\beta_1) + c(\beta_2) \leq c(\alpha)$.

b) Probar que si α no es binaria, lo afirmado en a) es falso.

c) Probar que lo afirmado en a) también es falso si se suman más de tres subfórmulas diferentes de α.

19) Una fórmula α del cálculo proposicional se dice *prima* si para todo par de subfórmulas α_1, α_2 de α, $c(\alpha) = c(\alpha_1) \cdot c(\alpha_2)$ implica $c(\alpha) = c(\alpha_1)$ o $c(\alpha) = c(\alpha_2)$.

a) Probar que si $c(\alpha)$es un número primo, entonces α es prima.

b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca de a) es falsa.

c) Probar que si α es una fórmula, entonces existe $n \in \mathbf{N}$ y existen n fórmulas primas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tales que $c(\alpha) = c(\beta_1) \cdot \ldots \cdot c(\beta_n)$.