Lógica y computabilidad

Práctica 2

Semántica del cálculo proposicional

En lo que sigue, **Form** denotará el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional y **Var** al conjunto de variables proposicionales. Si $\alpha \in \mathbf{Form}$, notaremos con $\mathbf{Var}(\alpha)$ al subconjunto de **Var** cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en α. Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son las primeras $n+1$ variables proposicionales, notaremos con $\mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ al subconjunto de **Form** formado por las fórmulas α tales que $\mathbf{Var}(\alpha) \subseteq \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$. Finalmente, notaremos con **Val** al conjunto de las valuaciones.

1) Sea $v : \mathbf{Form} \to \{0, 1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

i) $\alpha = \neg p_1$.
ii) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.
iii) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.
iv) $\alpha = \neg p_4$.
v) $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

2) Sean $v_1, v_2 : \mathbf{Form} \to \{0, 1\}$ dos valuaciones tales que $v_1(p_i) = v_2(p_i), 1 \leq i \leq 2$. Si $\alpha \in F(p_1, p_2)$ y $v_1(\alpha) = 0$, calcular $v_2(\neg\alpha)$.

3) (i) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$, siendo:

a) $\alpha = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.
b) $\alpha = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.
c) $\alpha = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

(ii) Para las fórmulas de la parte (i), hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin \mathbf{Var}(\alpha)$.

4) Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:

i) El "o" exclusivo.
ii) $(p_1 \to (p_2 \to p_1))$.
iii) $((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$.

5) Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

6) a) Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Probar:

i) $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

ii) $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

iii) $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

iv) Si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

7) Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a) Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b) Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

8) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que $\alpha \vee p_i$ es tautología y $\alpha \wedge p_i$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α. Probar que α tiene una sola variable proposicional.

9) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{Form}$ y sea $\sim$ la siguiente relación binaria definida sobre $\mathbf{Val}$:

$v_1 \sim v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Probar que el número de elementos del conjunto cociente $\mathbf{Val}/\sim$ es menor o igual que 2^k.

c) Para cada número natural $n \leq 2^k$, encontrar k fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $\mathbf{Val}/\sim$ tenga exacatamente n elementos.

Recordar que dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v. Notaremos con $\equiv_n$ a la restricción de la relación $\equiv$ a $\mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n) \times \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, o sea $\alpha \equiv_n \beta$ si y sólo si $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ y $\alpha \equiv \beta$.

10) Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:
i) $(p_1 \wedge p_2)$; $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$.
ii) $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
iii) $p_1 \rightarrow p_2; \neg p_2 \rightarrow \neg p_1$.

11) Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes, (ver el Ejercicio 14 de la Práctica 1). ¿ Son necesariamente equivalentes?.

12) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tal que $\alpha \vee \neg p_i$ es tautología para todo $0 \leq i \leq n$. Probar que α es tautología o $\alpha \equiv (p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n)$, donde $(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n)$ es la fórmula que se define inductivamente como sigue: si $n = 0$, la fórmula es p_0, si $n > 0$, entonces $(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n) = ((p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_{n-1}) \vee p_n)$.

13) Sea $\mathbf{Form}/\equiv$ el conjunto cociente correspondiente a $\equiv$. Si $\alpha \in \mathbf{Form}$, $|\alpha|$ denotará la clase de equivalencia de α. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$ definimos en $\mathbf{Form}/\equiv$ la siguiente relación $\leq$: $|\alpha| \leq |\beta|$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.
a) Probar que $\mathbf{Form}/\equiv$ es infinito y que $\leq$ está bien definida.
b) Probar que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbf{Form}/\equiv$.
c) Si $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$, definimos en $\mathbf{Form}/\equiv$ las operaciones binarias, $\wedge^*$, $\vee^*$ y la operación unaria $\neg^*$ como sigue:
$|\alpha| \wedge^* |\beta| = |\alpha \wedge \beta|, |\alpha| \vee^* |\beta| = |\alpha \vee \beta|$, $\neg^*|\alpha| = |\neg\alpha|$.
Probar que :
c1) $\wedge^*$, $\vee*$ y $\neg^*$ están bien definidas.
c2) $|\alpha| \wedge^* |\beta| = |\beta| \wedge^* |\alpha|, |\alpha| \vee^* |\beta| = |\beta| \vee^* |\alpha|$.
c3) $|\alpha| \wedge^* |\alpha| = |\alpha| \vee^* |\alpha| = |\alpha|$.
c4) $|\alpha| \wedge^* (|\alpha| \vee^* |\beta|) = |\alpha|, |\alpha| \vee^* (|\alpha| \wedge^* |\beta|) = |\alpha|$.
c5) $|\alpha| \wedge^* (|\beta| \vee^* |\gamma|) = (|\alpha| \wedge^* |\beta|) \vee^* (|\alpha| \wedge^* |\gamma|)$.
c6) Probar que $|\alpha| \leq |\beta|$ sii $|\alpha| = |\alpha| \wedge^* |\beta|)$ si y sólo si $|\alpha| \vee^* |\beta| = |\beta|$.
c7) Probar que si α es una tautología y β es una contradicción, entonces para toda fórmula γ se cumple $|\beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha|$, $|\gamma| \vee^* \neg^*|\gamma| = |\alpha|$ y $|\gamma| \wedge^* \neg^*|\gamma| = |\beta|$.

Observación: El conjunto $\mathbf{Form}/\equiv$ se denomina el álgebra de Lindenbaum del cálculo proposicional y resulta ser un álgebra de Boole con el orden $\leq$ definido arriba.

14) Sean α y β en $\mathbf{Form}$ tales que $|\alpha| < |\beta|$. Probar que existe una fórmula γ tal que $|\alpha| < |\gamma| < |\beta|$.

15) Sea $\mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)/\equiv_n$ el conjunto cociente respecto a $\equiv_n$. Si $\alpha \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, notaremos con $|\alpha|_n$ a la clase de equivalencia de α respecto a $\equiv_n$.

a) Probar que $\mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)/\equiv_n$ es un conjunto finito y calcular su cardinal.

b) Dar un ejemplo de dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tales que $|\alpha|_n < |\beta|_n$ tales que no exista una fórmula $\gamma \in \mathbf{Form}(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ tal que $|\alpha|_n < |\gamma|_n < |\beta|_n$.

16) Dado un conjunto de conectivos, se dice que es adecuado si a partir de sus elementos pueden definirse todos los demás conectivos. Luego toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de un conjunto adecuado.

a) Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.

b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}, \{\vee, \wedge\}, \{\vee, \rightarrow\}$.

17) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que $\vee$ es el único conectivo que figura en α. Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que $\rightarrow$ sea el único conectivo que figure en γ.

18) Probar que el resultado del ejercicio anterior es falso si se considera el conectivo $\wedge$ en lugar de $\vee$.

19) Si α y β son fórmulas, se nota $\alpha|\beta$ en lugar de $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, conocida como barra de Sheffer; y $\alpha \downarrow \beta$ en lugar de $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, barra de Nicod.

a) Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.

b) Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

c) Probar que si $\{*\}$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ o $\downarrow$.

20) Analizar si los siguientes conectivos ternarios son adecuados:

a) $p * q * r = (p \rightarrow (\neg q \wedge r))$.

b) $p * q * r = (p \rightarrow (q \wedge r))$.

donde p, q, r son variables proposicionales.

21) Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{0\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conectivo 0-ario, caracterizado por $v(0) = 0$ para toda valuación.

a) Probar que $\{0, \rightarrow\}$ es adecuado.

b) Si en lugar de agregar 0, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo 0-ario 1, caracterizado por $v(1) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{1, \rightarrow\}$?.