Lógica y computabilidad

Práctica 3

Consecuencia lógica

Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de Γ.

1) Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

a) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

b) $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1\}$.

2) Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible. Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta.

b) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfactible.

3) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Probar que existen dos conjuntos insatisfactibles de fórmulas Γ_1 y Γ_2 tales que $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

4) Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

5) a) Probar que existe un conjunto Γ de fórmulas del cálculo proposicional que satisface las siguientes propiedades:

1) Γ es satisfactible.

2) $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$.

b) Más generalmente, dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ, probar que existe $\Gamma' \subseteq \mathbf{Form}$ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' satisface 1) y 2) de la parte a).

6) Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas.

i) Probar que $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

ii) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

iii) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

iv) Probar que $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

v) Probar que $X \equiv Y$ si y sólo si $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(Y)$.

7) Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

i) Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
ii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
iii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
iv) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

8) Demostrar que son equivalentes:
a) $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.
b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.
c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.
d) $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

9) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que α es consecuencia lógica del conjunto formado por todas las subfórmulas de α diferentes de α.
a) Dar ejemplos de fórmulas que tienen esta propiedad.
b) ¿Puede dar una caracterización de qué fórmulas cumplen esta propiedad?.

10) Sea Γ un conjunto finito y satisfactible de fórmulas. Probar que el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es infinito.

11) Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas del cálculo proposicional que satisface la siguiente propiedad:
Para toda fórmula α, $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$
Probar que si $\alpha \vee \beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$, entonces $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ para todo par de fórmulas α, β.

12) Dar ejemplos de conjuntos de fórmulas del cálculo proposicional que verifiquen la hipótesis del ejercicio anterior.

13) Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que satisface la siguiente propiedad:
Si $\mathbf{Con}(\Gamma) = \Gamma$.
Probar que Γ es infinito. ¿Puede dar ejemplos de estos conjuntos?.

14) Sean Γ un conjunto de fórmulas y sea α una fórmula. Diremos que α es anticonsecuencia de Γ si se cumple lo siguiente:
Si v es una valuación tal que $v(\alpha) = 0$, entonces $v(\beta) = 0$ para toda $\beta \in \Gamma$.
Si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ ¿es α es anticonsecuencia de Γ?.
Si α es anticonsecuencia de Γ, ¿es α consecuencia de Γ?.

15) Dar ejemplos de fórmulas que sean anticonsecuencia de algún conjunto Γ y enunciar propiedades análogas a las del ejercicio 6) para la noción de anticonsecuencia.