

Lógica y computabilidad

Práctica 4 (Compacidad)

- 1) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfactibles de fórmulas, tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.
- 2) Enunciar y demostrar resultados análogos a los del ejercicio anterior cuando se consideran más de dos conjuntos.
- 3) Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que verifica la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ , entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología o bien $\beta \rightarrow \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.
- 4) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ , entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ es tautología.
- 5) Sea X una fórmula satisfactible. Se construye un conjunto Γ inductivamente del siguiente modo: $\Gamma_0 = \{X\}$, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{Y\}$, donde Y es una fórmula que es disyunción de literales (variables proposicionales o negación de variables proposicionales), y que contiene una variable proposicional o negación de una variable proposicional que no aparece en ninguna de las fórmulas de Γ_i . Si $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Gamma_i$, probar que Γ es satisfactible.
- 6) Usar el ejercicio anterior, para dar ejemplos de conjuntos satisfactibles infinitos.
- 7) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ y Γ un conjunto de fórmulas tales que α es anticonsecuencia de Γ . ¿Es α anticonsecuencia de un subconjunto finito de Γ ?
- 8) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Diremos que Γ_2 es consecuencia de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1 , entonces existe una fórmula de Γ_2 tal que dicha valuación hace verdadera a la fórmula. Diremos que Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1 , entonces dicha valuación hace verdadera a todas las fórmulas de Γ_2 . Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
 - a) Si Γ_2 es consecuencia de Γ_1 , entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia de S .
 - b) Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1 , entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S .

9) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Se define $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 = \{\alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$. Probar que si $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es satisfactible, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y β_1, \dots, β_m fórmulas de Γ_2 tales que $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m)$ es satisfactible.

10) Establecer resultados análogos a los del ejercicio anterior para los otros conectivos.