Lógica y computabilidad

Práctica 5
Teoría axiomática

En los ejercicios siguientes, L denotará la teoría axiomática para el cálculo proposicional dada en clase.

1. Reescribir los axiomas y las reglas de inferencia de L usando solamente los conectivos $\neg$ y $\vee$.

2. Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ fórmulas del cálculo proposicional. Probar

   a) $\vdash (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$.
   b) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$.
   c) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \vdash \mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})$.
   d) $\vdash (\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$.

3. Sean Γ un conjunto de fórmulas y $\mathcal{C}$ una formula tal que $\Gamma \vdash \mathcal{C}$.

   a) Sea $\mathcal{B}$ una fórmula de Γ. Probar que $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\mathcal{B}\} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.
   b) Suponga que $\Gamma = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$. Probar que

   $$\vdash \mathcal{B}_1 \Rightarrow (\mathcal{B}_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (\mathcal{B}_n \Rightarrow \mathcal{C}) \cdots)$$

4. Demostrar que las siguientes fórmulas son teoremas del cálculo proposicional.

   a) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.
   b) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \vee \mathcal{B})$.
   c) $\mathcal{C} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$.
   d) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$.
   e) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$.
   f) $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow ((\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$.
   g) $((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$.
   h) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$.

5. Sabiendo que $\vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ para $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ fórmulas cualesquiera. Demostrar que si existen fórmulas que no son teoremas, entonces L es consistente.

6. Sea $\mathcal{B}$ una fórmula del cálculo proposicional que no es tautología. Sea L^+ la teoría axiomática que resulta de agregar a L como nuevos axiomas las fórmulas obtenidas sustituyendo cada variable de $\mathcal{B}$ por una fórmula arbitraria. Mostrar que L^+ es inconsistente.