Lógica y computabilidad

Práctica 6

Cálculo de predicados

1) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

i) $\exists f_2(x) P(f_2(x))$.

ii) $f_2(f_1(x), f_1(y))$.

iii) $\forall x \exists c P(x, c)$.

iv) $\forall c \exists x P(x, c)$

v) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.

2) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

a) $\forall x \exists y P(x, x)$.

b) $(\exists x P(y, y) \to \exists y P(y, z))$.

c) $\exists x(\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.

d) $\forall z(\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3) Para cada uno de los siguientes lenguajes, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

i) $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g(n, m) = n + m$.

ii) $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

iii) $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, donde f es unario y g binario, $U_I = \mathbf{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n, n) = n^2 - n$, $c_I = 0 = d_I$.

4) En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

i) $\forall x \forall y(P(x, y) \to \exists z((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I =<$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

ii) $\forall x(Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge P(y,x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x,y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un esclavo.

iii) $\forall x\forall y(Q(x) \wedge Q(y)) \to P(f(x,y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x,y) = x+y$.

iv) Para los siguientes enunciados, el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, $P_I(x,y)$ significa x quiere a y, donde P es un símbolo de predicado binario.

a) $\exists x\forall y P(x,y)$

b) $\forall y\exists x P(x,y)$

c) $\exists x\exists y(\forall z P(y,z) \to P(x,y))$.

d) $\exists x\forall y\neg P(x,y)$.

5) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de dos símbolos de función binarios f, g y dos constantes c, d, un símbolo de predicado binario P y un símbolo de predicado ternario T. Para cada uno de los siguientes enunciados e interpretaciones, escribir en el lenguaje castellano la propiedad que determinan y analizar la veracidad o falsedad de dichos enunciados.

I) $\forall x\exists y(x = f(y,y) \vee x = f(f(y,y),d))$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x+y$, $d_I = 1$.

II) $\forall x\forall y(g(x,y) = c \to (x = c \vee y = c))$, $U_I = \mathbf{N}$, $g_I(x,y) = x \cdot y$, $c_I = 0$.

III) $\exists y f(y,y) = d$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x+y$, $d_I = 1$.

IV) $\forall x\forall y f(x,y) = f(y,x)$, $U_I = \mathbf{Z}$, $f_I(x,y) = x+y$.

V) $\forall x\exists y\exists z x = f(y,z)$, $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = x^2+y^2$.

VI) Las fórmulas son las mismas que los incisos IV) y V), $U_I = \mathbf{N}$, $f_I(x,y) = (x+1)^y$.

En los incisos siguientes, $U_I = \mathbf{N}$, $P_I =<$ y $T_I(x,y,z)$ significa $x+y=z$

VII) $\forall x\forall y\forall x(T(x,y,z) \to T(y,x,z))$.

VIII) $\forall x\forall y(T(x,x,y) \to P(x,y))$.

IX) $\exists x\forall y T(x,y,y)$.

X) $\forall x\forall y(P(x,y) \to \exists z T(x,z,y))$.

6) Traducir las siguientes sentencias en enunciados, donde *todos los A son B* se traducen en enunciados de la forma $\forall x(A(x) \to B(x))$, por ejemplo

todos los hombres son mortales, se traduce como $\forall x(H(x) \to M(x))$, donde $H_I(x)$ significa x es hombre y $M_I(x)$ se traduce x es mortal. Análogamente, *algunos A son B, ningún A es B* se traducen en enunciados de la forma $\exists x(A(x) \land B(x))$ y $\forall x(A(x) \to \neg B(x))$ respectivamente.

a) Ningún político es honesto.

b) No todas las aves pueden volar.

c) x es trascendente si y sólo si x es irracional.

d) Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.

e) Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.

7) Considere la siguiente sentencia e) en el conjunto de los enteros positivos distintos de 1: Si p es un número primo positivo, entonces $a^p - a$ es divisible por p, para todo entero positivo a distinto de 1. Dar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ tal que el único símbolo de predicado sea la igualdad, sin símbolos de constante, y un enunciado α, tal que en la interpretación correspondiente, α represente la sentencia e).

8) Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a) Existen al menos dos elementos.

b) Existen exactamente dos elementos.

c) Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escibir:

d) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.

e) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.

f) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

9) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binario f y con un símbolo de constante c. Decidir si los siguientes enunciados son satisfactibles. En los casos que la respuesta sea afirmativo encontrar dos interpretaciones que satisfagan a dicho enunciados: una que tenga universo finito y la otra no.

a) $\forall x \forall y \forall w \forall z(f(x, y) = f(z, w) \to (x = z \land y = w))$

b) $\forall x \forall y(f(x, x) = f(y, y) \to x = y)$.

c) $\forall x \exists y \; x = f(y, y)$.

d) $\forall x f(x, c) = c$.

e) $\forall x(f(x, c) = c \rightarrow x = c)$.
f) $(\forall x f(x, c) = c \rightarrow x = c)$.

10) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes interpretaciones, encontrar un enunciado que tenga como modelo a la interpretación dada pero que dicho enunciado no sea satisfecho por todas las interpretaciones de $\mathcal{L}$.
a) $U_I = \mathbf{R}, f_I(x, y) = x \cdot y, c_I = 1$.
b) $U_I = \mathbf{C}, f_I(x, y) = Re(x) + Im(y) + i, c_I = i$.
donde $\mathbf{R}$ es el conjunto de los números reales, $\mathbf{C}$ es el conjunto de los números complejos y $Re(z), Im(z)$ denotan la parte real y la parte imaginaria.