

**Lógica y computabilidad**  
**Práctica 7 (Computabilidad)**

- 1) Escribir en  $S$  algoritmos para calcular las siguientes funciones aritméticas:
  - a) Producto:  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ . (Usando suma como macro).
  - b) Potencia:  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ . (Usando producto como macro).
- 2) Demostrar que  $S$  computa la función vacía  $\emptyset : \mathbf{N}^k \rightarrow \mathbf{N}$ .
- 3) Escribir en  $S$  algoritmos para calcular las siguientes funciones de decisión:

a)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

b)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

c)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

d)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

- 4) Demostrar que el lenguaje  $S$  cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1:

- a) Computa la función  $suc : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $suc(x) = x + 1$ .
- b) Computa las proyecciones  $Pin$ .
- c) Computa las constantes  $Ckn$ .

Propiedad 2: Si  $S$  computa  $f : \mathbf{N}^k \rightarrow \mathbf{N}$  y computa  $g_i : \mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $S$  computa la composición:

$$h(x_1, \dots, x_r) = f(g_1(x_1, \dots, x_r), \dots, g_k(x_1, \dots, x_r)).$$

Propiedad 3:

Computa la función de decisión  $d : \mathbf{N}^4 \rightarrow \mathbf{N}$ :

$$d(x, y, s, t) = \begin{cases} s & \text{si } x = y \\ t & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

5) Escribir un programa que compute la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

6) Escribir un programa que compute la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7) Sea  $f(x)$  el mayor número natural tal que  $2 \cdot n \leq x$ . Escribir un programa que compute a  $f$ .

8) Escribir un programa que compute el mínimo común múltiplo y otro que compute el máximo común divisor.

9) Sea  $P(x)$  un predicado computable. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } P(x + y) \text{ es verdadero} \\ \uparrow & \text{sino} \end{cases}$$

es parcialmente computable.

10) Sea  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  una función biyectiva y computable. Probar que  $f^{-1}$  es computable.