Lógica y computabilidad

Práctica 8 (Funciones recursivas primitivas)

1. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

   (a)
   $$max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$$

   (b)
   $$min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

   (c)
   $$par(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; par \\ 0 & \text{si } x \; es \; impar \end{cases}$$

   (d) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

   (e) $sqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

   (f)
   $$psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; un \; cuadrado \; perfecto \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

   (a) La función f_1 de una variable, donde $f_1(0) = \psi(0)$, $f_1(1) = \psi(\psi(1) + 1)) + 1$, y en general:
   $f_1(x) = \psi(\psi(\ldots(\psi(x) + 1)\ldots) + 1) + 1$.
   donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x + 1$.

   (b) La función f_2 de dos variables, donde $f_2(x,0) = \phi(x,0)$, $f_2(x,1) = \phi(\phi(x,1),0)$, y en general:
   $f_2(x,y) = \phi(\phi(\phi(\ldots\phi(\phi(x,y),y-1)\ldots 2),1),0)$.

3. Usar las definiciones por sumas y/o productos acotados para establecer la recursividad primitiva de cada una de las funciones siguientes. Suponer que g es una función primitiva recursiva de una variable.

   (a) $f(y) =$ el número de valores de i en el intervalo $0 \leq i \leq y$ para los cuales $g(i) > 3$.

   (b)
   $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i+1) > g(i) \text{ para todos los valores de } i \text{ en el intervalo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (c)
   $$f(w,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x+1), \ldots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Sea g una función recursiva primitiva de $n+1$ variables. Se define la función f a partir de g por:

   $f(x_1, \ldots, x_n, y) = max_{0 \leq i \leq y}(g(x_1, \ldots, x_n, i))$.

   De modo que f puede pensarse obtenida a partir de g por una operación de "máximo acotado". Probar que la función f es primitiva recursiva.

5. Usar minimización acotada para probar que las funciones de los incisos a),b),d) y e) del ejercicio 1) son primitivas recursivas.

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

   (a) $shr(x,n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

   (b)
   $$lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (c) $dig(x,n) =$ el n-ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando con 0. Así, $dig(13,0) = 1, dig(13,1) = 0, dig(13,2) = 1, dig(13,3) = 1, dig(13,4) = 0$, etc.

(d) $wgt(x) =$ el número de unos en la representación binaria de x.

7. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   (a) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n.
   (b) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n.

8. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   (a) $G(n, m)$ es la cantidad de números primos entre n y m.
   (b) $G(n, m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.