Lógica y computabilidad

Práctica 9

1) Probar que una función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico es recursiva, es decir la función dada por la siguiente fórmula:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

2) Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbf{N}$.

3) Probar que Halt (x, x) no es computable.

4) Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x))$ no es computable. (Sugerencia, considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5) Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Dom f \\ \uparrow & \text{si } x \notin Dom f \end{cases}$$

6) Probar que la siguiente función es parcialmente computable:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x, x) + 1 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7) Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u, v, w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u, v, w, z) = \Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

8) a) Sea f la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x, y) = \psi_{h(x)}(y)$.

b) Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.

c) Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.

9) Probar que la siguiente función no es computable:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10) Probar que existe una función parcialmente computable g tal que para toda función recursiva f, f no es una extensión g. (f se dice una extensión de g si y sólo si $g(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de g.)

11) Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable. Qué podría decir de f cuando g es total computable?.

12) Probar que el conjunto $\{x \in \mathbf{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo de dos maneras distintas.

13) Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

a) $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : y \in \text{rango de } \psi_x\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : \psi_x = \psi_y\}$.

c) $\{x \in \mathbf{N} : \text{rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.

14) Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.

15) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbf{N} \backslash B$ es recursivo.

b) Si $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.

16) Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

17) Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbf{N} : \psi_x(0) = 1\}$ es recursivamente enumerable.

18) Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:
a) $\{x \in \mathbf{N} : \psi_x(0) \downarrow\}$.
b) $\{x \in \mathbf{N} : \psi_x(x) \downarrow\}$.
c) $\{x \in \mathbf{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$.

19) Probar que $B = \{x \in \mathbf{N} : 1 \in \text{dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable.