Primer Parcial

19/10/07

1. Decidir usando valuaciones o árboles si las siguiente fórmulas son tautologías, contingencias o contradicciones.

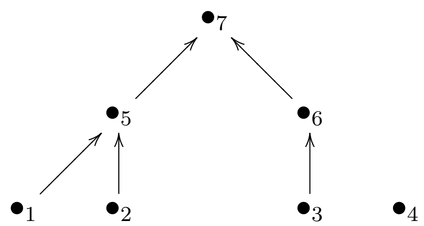
   a) $\left(\boxed{(}\alpha \wedge \beta\boxed{)} \rightarrow \boxed{(}\beta \vee \neg\alpha\boxed{)}\right) \wedge (\alpha \vee (\neg\beta \wedge \neg\alpha))$

   b) $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\varepsilon \rightarrow \neg(\gamma \vee \beta))) \rightarrow \neg\varepsilon$

2. *a*) Encontrar un conjunto de fórmulas $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ que sea insatisfactible, pero que sus subconjuntos $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ y $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ sean satisfactibles.

   b) Encontrar un conjunto de fórmulas $\Gamma_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ que sea insatisfactible, pero que sus subconjuntos $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_4\}$, $\{\beta_1, \beta_3, \beta_4\}$ y $\{\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ sean satisfactibles.

3. Considerándo el lenguaje de primer $\mathcal{L}$ con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo) y la siguiente interpretación:



   a) Dar una fórmula α con una única variable libre x tal que al sustituirla por los elementos del universo sólo sea verdadera para 3.

   b) Considerando la fórmula

   $$\beta = \exists y \exists z\,(\neg(y \leq z \vee z \leq y) \wedge (y \leq x \wedge \neg x \leq y) \wedge \neg(z \leq x \rightarrow x \leq z))$$

   ¿Por cuáles elementos del universo se puede sustituir a la variable libre x para que sea verdadera?

4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sean Γ, Γ' dos conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$ tales que para toda fórmula $\alpha \in \Gamma'$ se tiene que $\Gamma \models \alpha$.

   a) Probar que si Γ' es finito, entonces existe un subconjunto $\boxed{\text{finito}}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tal que para toda fórmula $\alpha \in \Gamma'$ se tiene que $\Gamma_0 \models \alpha$.

   b) Encontrar un contraejemplo si Γ' es infinito.

5. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un predicado binario R y un predicado unario P, definimos

   $$\begin{aligned} \Gamma &= \{\forall x \forall y\,(xRy \rightarrow yRx)\,, \forall x \forall y\,((xRy \wedge Px) \rightarrow \neg Py)\,, \forall x \forall y\,((xRy \wedge \neg Px) \rightarrow Py)\} \\ \alpha &= \forall x \neg xRx. \end{aligned}$$

   a) Probar que $\Gamma \models \alpha$.

   b) Describa en castellano qué modela Γ y qué propiedad es α.