Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 1: Lenguaje del Cálculo Proposicional

Notación Si X es un conjunto, $\#X$ denota su cardinal; *Form* denota el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional y *Var* el conjunto de todas las variables proposicionales.

Si $\alpha \in Form$,

- $c(\alpha)$ denota la complejidad de α.
- $cb(\alpha)$ la complejidad binaria de α.
- $Var(\alpha)$ es el subconjunto de *Var* cuyos elementos son las variables proposicionales que figuran en α.
- $\#VarR(\alpha)$ es el número de variables proposicionales que figuran en α contadas tantas veces como aparecen.
- $s(\alpha)$ es el conjunto de subfórmulas de α (ver ejercicio 5).

1. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$, $S = \{p, q\}$, $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

   - La expresión vacía pertenece a $\mathcal{L}$.
   - Si $\beta \in A$ entonces β es una palabra.
   - Si α es una palabra, las expresión $p\alpha q$ también lo es.
   - Si α es una palabra y $\beta \in A$, las expresiones $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son palabras.
   - Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.

   Se define el peso de una expresión como el número de p que aparecen en la expresión menos el número de q que aparecen en la expresión.

a) Escribir cinco expresiones de Σ^* que no sean palabras y cinco que si lo sean.

b) Probar que las palabras de $\mathcal{L}$ son expresiones de peso 0.

c) ¿Es toda expresión de peso 0 una palabra?

d) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.

2. Sea A un conjunto finito y sea $S \subset A$ un subconjunto no vacío y diferente de A. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje definido como sigue.

   - Si $\alpha \in A \backslash S$, entonces α es una palabra.
   - Si $\sigma \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ y $\chi_1, \dots, \chi_n$ son palabras, entonces $\sigma \chi_1 \dots \chi_n \sigma$ es una palabra.
   - Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.

   a) Probar que si α es una palabra, entonces el número de elementos de S que figuran en α (contados tantas veces como aparecen) es un número par.

   b) Probar que si $\sigma, \tau \in S$, $\chi_1, \dots, \chi_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ son palabras tales que $\sigma \chi_1 \dots \chi_n \sigma = \tau \gamma_1 \dots \gamma_m \tau$, entonces $n = m$, $\sigma = \tau$ y $\chi_1 = \gamma_1, \dots, \chi_n = \gamma_n$.

   c) Sean α, β palabras y sea $\beta(\alpha)$ la expresión que se obtiene sustituyendo todas las apariciones de elementos de A en β por α. Por ejemplo, si $\beta = \sigma \chi \sigma$ con $\sigma \in S$ y $\chi \in A \backslash S$, entonces $\beta(\alpha) = \sigma \alpha \sigma$. Probar que $\beta(\alpha)$ es una palabra.

3. Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas del cálculo proposicional. En caso afirmativo, encontrar una cadena de formación de tales fórmulas

   a) $(p_1 \vee p_2) \to p_3$

   b) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$

   c) $((\neg\neg p_1 \to p_1) \to p_2)$

   d) $p_1 \vee (\neg p_2)$

   e) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to (p_5 \to p_2))$

4. Probar que si α es una fórmula del cálculo proposicional, entonces α admite infinitas cadenas de formación.

5. Definir inductivamente la noción de subfórmula. Si $\alpha \in Form$, llamaremos $s(\alpha)$ al conjunto de subfórmulas de α.

6. Para cada una de las siguientes fórmulas encontrar todas las cadenas de formación minimales y enumerar su conjunto de subfórmulas.

   a) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$
   b) $((p_1 \vee (p_5 \to p_2)) \to (\neg p_1 \to \neg p_2))$
   c) $((\neg p_1 \vee p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$

7. Mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, entonces existe $\alpha \in Form$ tal que $\#s(\alpha) = n$.

8. Sea $\alpha \in Form$. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces β aparece en toda cadena de formación de α.

9. (*) Probar que si $\alpha \in Form$, C es una cadena de formación minimal de α y β es un eslabón de C, entonces β es subfórmula de α.

10. *a*) Sea $\alpha \in Form$, tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.
    b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si $\alpha \in Form$ tal que $c(\alpha) = n$, ¿existe una subfórmula de α que tenga grado de complejidad k?.

11. Sea $\alpha \in Form$. Probar las siguientes relaciones

    a) $\#VarR(\alpha) = cb(\alpha) + 1$
    b) $\#Var(\alpha) \leq cb(\alpha) + 1$
    c) $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#Var(\alpha)$

12. Sea $\alpha \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$; llamaremos $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ a tal sustitución.

13. Sean $\alpha, \gamma \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Diremos que α y γ son *sintácticamente equivalentes* y lo notaremos $\alpha \sim \gamma$ si existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in Form$ tales que β_i es una variable proposicional para todo i, $\beta_i \neq \beta_j$ si $i \neq j$, y $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \gamma$.

    a) Probar que es una relación de equivalencia en *Form*.

b) Probar que si $\alpha \sim \gamma$, entonces α y γ tienen la misma longitud, la misma complejidad y la misma complejidad binaria.

14. Sea $\alpha \in Form$. Notaremos con $\alpha_\neg$ a la expresión que se obtiene al eliminar todas las apariciones del símbolo $\neg$ en α (por ejemplo, si $\alpha = \neg(\neg p_2 \vee p_3))$, entonces $\alpha_\neg = (p_2 \vee p_3))$.

    a) Definir formalmente $\alpha_\neg$ para toda $\alpha \in Form$.

    b) Probar que si $\alpha \in Form$, entonces $\alpha_\neg \in Form$.

    c) Analizar cuáles de las siguientes igualdades se cumplen para toda $\alpha \in Form$:

    1) $c(\alpha) = c(\alpha_\neg)$
    2) $cb(\alpha) = cb(\alpha_\neg)$
    3) $\#Var(\alpha) = \#Var(\alpha_\neg)$
    4) $\#VarR(\alpha) = \#VarR(\alpha_\neg)$
    5) $\#s(\alpha) = \#s(\alpha_\neg)$