Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 2: Semántica del Cálculo Proposicional

Notación Notaremos con *Val* al conjunto de las valuaciones.

Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son las primeras $n+1$ variables proposicionales, notaremos con $Form_n$ al subconjunto de $Form$ formado por las fórmulas α tales que $Var(\alpha) \subseteq \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$.

Dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v. Notaremos con $\equiv_n$ a la restricción de la relación $\equiv$ a $Form_n \times Form_n$, o sea $\alpha \equiv_n \beta$ si y sólo si $\alpha, \beta \in Form_n$ y $\alpha \equiv \beta$.

1. Sea $v : Form \to \{0,1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

   a) $\alpha = (\neg p_1)$.

   b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

   c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

   d) $\alpha = (\neg p_4)$.

   e) $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

2. *a*) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin Var(\alpha)$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?

   1) $\alpha = ((\neg p_1) \to (p_3 \vee p_4))$.
   2) $\alpha = (\neg (p_2 \to (p_3 \wedge p_1)))$.
   3) $\alpha = (((\neg p_2) \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

   b) Para estas mismas fórmulas , hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?

3. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:

   a) El o exclusivo (XOR).

   b) El y exclusivo ($XAND$).

   c) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$.

   d) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)))$.

4. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

5. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Probar:

   a) $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

   b) $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

   c) $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

   d) Si $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

6. Sean $\alpha, \beta \in Form$.

   a) Probar que si $(\alpha \wedge \beta)$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

   b) Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.

7. Sea $\alpha \in Form$ tal que $(\alpha \vee p_i)$ es tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α. Probar que α tiene una sola variable proposicional.

8. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in Form$ y sea $\sim$ la relación binaria definida en Val:
   $v_1 \sim v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
   a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   b) Probar que el número de elementos del conjunto cociente $Val/\sim$ es menor o igual que 2^k.
   c) Para cada número natural $n \leq 2^k$, encontrar un conjunto de k fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $Val/\sim$ tenga exactamente n elementos.

9. Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:
   a) $(p_1 \wedge p_2)$; $(\neg((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$.
   b) $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
   c) $p_1 \rightarrow p_2$; $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)$.

10. Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes (ver Práctica 1).
    a) ¿Son necesariamente equivalentes?
    b) ¿Si α es una tautología, β es una tautología?
    c) ¿Si α es una contradicción, β es una contradicción?
    d) ¿Si α es una contingencia, β es una contingencia?

11. Sea $Form/\equiv$ el conjunto cociente correspondiente a $\equiv$. Si $\alpha \in Form$, $|\alpha|$ denotará la clase de equivalencia de α.
    a) Probar que $Form/\equiv$ es infinito.
    b) Si $\alpha, \beta \in Form$, probar que están bien definidas las operaciones binarias, $\wedge^*$, $\vee^*$, $\rightarrow^*$ y la operación unaria $\neg^*$, definidas en $Form/\equiv$ como sigue:
       - $(|\alpha| \wedge^* |\beta|) = |(\alpha \wedge \beta)|$.
       - $(|\alpha| \vee^* |\beta|) = |(\alpha \vee \beta)|$.
       - $(|\alpha| \rightarrow^* |\beta|) = |(\alpha \rightarrow \beta)|$.
       - $(\neg^* |\alpha|) = |(\neg\alpha)|$.

    Observación: El conjunto $Form/\equiv$ se denomina el álgebra de Lindenbaum del cálculo proposicional.

12. Sea $Form_n/\equiv_n$ el conjunto cociente respecto a $\equiv_n$. Si $\alpha \in Form_n$, notaremos con $|\alpha|_n$ a la clase de equivalencia de α respecto a $\equiv_n$.

a) Probar que $Form_n / \equiv_n$ es un conjunto finito y calcular su cardinal.

b) Definir $\wedge_n^*$, $\vee_n^*$, $\rightarrow_n^*$ y $\neg_n^*$ y probar que están bien definidas.

13. Dado un conjunto de conectivos, se dice que es adecuado si a partir de sus elementos pueden definirse todos los demás conectivos. Luego toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de un conjunto adecuado.

    a) Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.

    b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$.

14. *a*) Sea $\alpha \in Form$ tal que $\vee$ es el único conectivo que figura en α. Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que $\rightarrow$ sea el único conectivo que figure en γ.

    b) Probar que el resultado anterior es falso si se considera el conectivo $\wedge$ en lugar de $\vee$.

15. Si α y β son fórmulas, se nota $\alpha|\beta$ en lugar de $((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$, conocida como barra de Sheffer ($NAND$); y $\alpha \downarrow \beta$ en lugar de $((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$, barra de Nicod ($NOR$).

    a) Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.

    b) Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

    c) Probar que si $\{*\}$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ o $\downarrow$.

16. Analizar si los siguientes conectivos ternarios son adecuados, donde α, β, γ son fórmulas.

    a) $(\alpha * \beta * \gamma) = (\alpha \rightarrow ((\neg\beta) \wedge \gamma))$.

    b) $(\alpha * \beta * \gamma) = (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$.

17. Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\bot\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conectivo 0-ario $\bot$, caracterizado por $v(\bot) = 0$ para toda valuación.

    a) Probar que $\{\bot, \rightarrow\}$ es adecuado.

    b) Si en lugar de agregar $\bot$, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo 0-ario $\top$, caracterizado por $v(\top) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?.