

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 3: Consecuencia Lógica

Notación Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por $Con(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de Γ .

1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

a) $\Gamma = \{((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

b) $\Gamma = \{((p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \rightarrow p_1)\}$.

Comparar el método de las tablas de verdad y de los árboles.

2. Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(\neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \rightarrow p_3)))$.

b) $\neg((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)))$.

c) $((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_3 \rightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.

d) $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4)$.

e) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$.

Comparar el método de las tablas de verdad y de los árboles.

3. Sea $\Gamma \subseteq Form$.

a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible.

b) Mostrar (con un ejemplo) que la recíproca no es cierta.

- c) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $Con(\Gamma)$ es satisfactible.
4. a) Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Probar que si el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es finito entonces Γ es infinito.
- b) Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ .
5. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional tal que $\Gamma = Con(\Gamma)$. Probar que Γ es infinito.
6. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ conjuntos de fórmulas.
- a) Probar que $Con(\emptyset) = \{\alpha \in Form/\alpha \text{ es una tautología}\}$.
- b) Probar que $\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$.
- c) Probar que $Con(Con(\Gamma)) = Con(\Gamma)$.
- d) Probar que $Con(\Gamma_1) \cup Con(\Gamma_2) \subseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Sin embargo ...

- a) Probar que no vale para todo Γ_1, Γ_2 la propiedad $Con(\Gamma_1) \cup Con(\Gamma_2) \supseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Ver que de las propiedades anteriores se deduce:

- a) Probar que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$.
- b) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_2)$ entonces $Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$.
7. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
- a) $Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.
- b) $Con(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = Con(\{\alpha\}) \cap Con(\{\beta\})$.
- c) $Con(\{(\alpha \vee \beta)\}) = Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\})$.
- d) $Con(\{(\alpha \rightarrow \beta)\}) \subseteq Con(\{\beta\})$.

8. Demostrar que son equivalentes:

- a) $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$.
- b) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

- c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$.
- d) $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β .

9. Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Decimos que Γ es *maximalmente satisfactible* si para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ se tiene que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible.

Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ :

- a) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si existe una valuación $v \in \text{Val}$ tal que $\Gamma = \{\alpha \in \text{Form} / v(\alpha)\} = 1$.
- b) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si para toda fórmula α se tiene que $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.
- c) Probar que existe $\Gamma' \subseteq \text{Form}$ maximalmente satisfactible tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
- d) Si Γ maximalmente satisfactible, probar que si $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$.
- e) Si Γ es maximalmente satisfactible, probar que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma$.

10. Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ :

- a) Si Γ es un conjunto maximalmente satisfactible, ¿es necesariamente $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$?
- b) Si $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$, ¿es necesariamente Γ un conjunto maximalmente satisfactible?

11. Decimos que dos conjuntos $\Gamma, \Gamma' \subset \text{Form}$ son *equivalentes* si para toda fórmula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma' \models \alpha$.

Decimos que un conjunto Γ es *independiente* si ninguna fórmula de Γ está tautológicamente implicado por las restantes fórmulas de Γ .

- a) Probar que todo conjunto finito de fórmulas tiene un subconjunto independiente equivalente.
- b) Probar que un conjunto infinito de fórmulas no siempre tiene un subconjunto independiente equivalente.
- c) (*) Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \dots\}$, mostrar que tiene un conjunto independiente equivalente Γ' (aunque en general Γ' no es un subconjunto de Γ).