Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 5: Cálculo de Predicados

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

    a) $\exists f_2(x) P(f_2(x))$.

    b) $f_2(f_1(x), f_1(y))$.

    c) $\forall x \exists c P(x, c)$.

    d) $\forall c \exists x P(x, c)$

    e) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.

2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

    a) $\forall x \exists y P(x, x)$.

    b) $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$.

    c) $\exists x (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.

    d) $\forall z (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3. Para cada uno de los siguientes lenguajes, en donde f es unario y g binario, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

    a) $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

b) $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n,m) = n + m$, $c_I = 2$.

c) $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $c_I = d_I = 0$

$$\begin{aligned} f_I(n) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases} \\ g_I(n,n) &= n^2 - n \end{aligned}$$

4. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

   a) $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x,z)) \wedge P(z,y)))$,
   donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I =<$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

   b) $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y,x)))$,
   donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x,y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un esclavo.

   c) $\forall x \forall y (Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x,y))$,
   donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x,y) = x + y$.

5. Describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados, en los cuales el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, donde P es un símbolo de predicado binario, tal que $P_I(x,y)$ significa x quiere a y.

   a) $\exists x \forall y P(x,y)$
   b) $\forall y \exists x P(x,y)$
   c) $\exists x \exists y (\forall z P(y,z) \rightarrow P(x,y))$
   d) $\exists x \forall y \neg P(x,y)$

6. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario f y una constantes c. Para cada una de las siguientes interpretaciones

- $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(x,y) = x + y$, $c_I = 1$
- $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(x,y) = x \cdot y$, $c_I = 0$

Escribir en el lenguaje castellano la propiedad que determinan los siguientes enunciados y analizar la veracidad o falsedad de los mismos.

a) $\forall x \exists y (x = f(y,y) \vee x = f(f(y,y),c))$
b) $\exists y \forall x (x = f(y,y) \vee x = f(f(y,y),c))$
c) $\forall x \forall y (f(x,y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c))$,

7. Traducir las siguientes sentencias en enunciados:

a) Ningún político es honesto.
b) No todas las aves pueden volar.
c) x es trascendente si y sólo si x es irracional.
d) Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.
e) Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.

8. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a) Existen al menos dos elementos.
b) Existen exactamente dos elementos.
c) Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escribir:

a) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.
b) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.
c) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

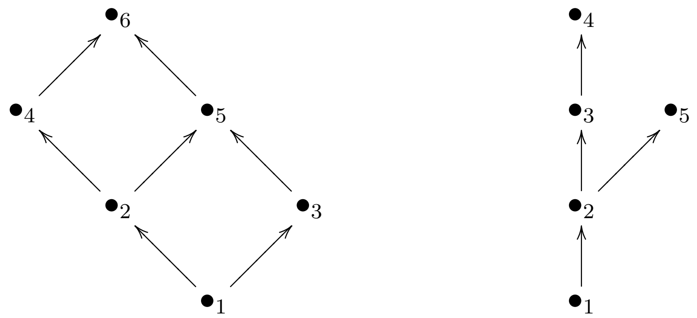
9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot),$$

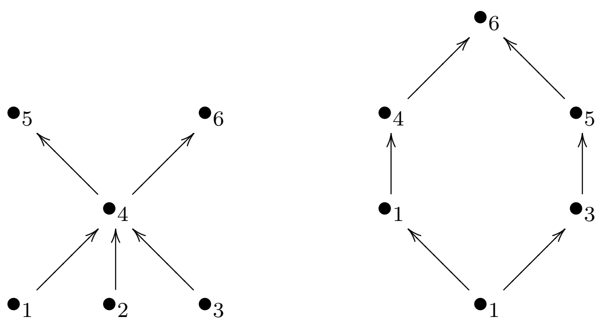
donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

10. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$.

    a) Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:

    b) ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de la siguientes interpretaciones?

11. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n + 1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.