Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 8: Funciones Recursivas Primitivas

1. Sean ψ y ϕ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar cuáles de las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva.

   a) $f(x, 0) = 17$.
   $f(x, y+1) = f(0, \phi(x, y))$.

   b) $f(x, 0) = \psi(x)$.
   $f(x, y+1) = f(x, y) + \phi(y, x)$.

   c) $f(x, 0) = \phi(0, x)$.
   $f(x, y+1) = \phi(f(x, y), y+1)$.

   Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h asociadas a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

2. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

   a) $max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$

   b) $min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$

   c) $par(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; par \\ 0 & \text{si } x \; es \; impar \end{cases}$

   d) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

   e) $sqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

   f) $psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \; es \; un \; cuadrado \; perfecto \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

3. Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

   a) La función f_1 de una variable, donde $f_1(0) = \psi(0), f_1(1) = \psi(\psi(1)+1)+1$, y en general:
   $f_1(x) = \psi(\psi(\ldots(\psi(x)+1)\ldots)+1)+1$.
   donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x+1$.

   b) La función f_2 de dos variables, donde $f_2(x,0) = \phi(x,0), f_2(x,1) = \phi(\phi(x,1),0)$, y en general:
   $f_2(x,y) = \phi(\phi(\phi(\ldots\phi(\phi(x,y),y-1)\ldots 2),1),0)$.

4. Usar las definiciones por sumas y/o productos acotados para establecer la recursividad primitiva de cada una de las funciones siguientes. Suponer que g es una función primitiva recursiva de una variable.

   a) $f(y) =$ el número de valores de i en el intervalo $0 \leq i \leq y$ para los cuales $g(i) > 3$.

   b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i+1) > g(i) \text{ para todo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) $f(w,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x+1), \ldots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Sea g una función recursiva primitiva de $n+1$ variables, s, t funciones recursivas primitivas de 1 variable. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas.

   a) $f_1(x_1,\ldots,x_n,y) = max_{0\leq i\leq y}(g(x_1,\ldots,x_n,i))$.

   b) $f_2(x_1,\ldots,x_n,y) = \begin{cases} max_{s(y)\leq i\leq t(y)}(g(x_1,\ldots,x_n,i)) & \text{si } s(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

   a) $shr(x,n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

   b) $lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) $dig(x,n)$ = el n-ésimo dígito en la representación binaria de x, contando desde la derecha y comenzando con 0. Así, $dig(13,0) = 1, dig(13,1) = 0, dig(13,2) = 1, dig(13,3) = 1, dig(13,4) = 0$, etc.

d) $wgt(x)$ = el número de unos en la representación binaria de x.

7. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   a) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n.

   b) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n.

8. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   a) $G(n,m)$ es la cantidad de números primos entre n y m.

   b) $G(n,m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.

9. Probar que la función de Fibonacci es primitiva recursiva. Esta función está definida por

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n+1) + F(n) \end{aligned}$$

10. Probar que la siguiente función es primitiva recursiva.

$$\begin{aligned} H(0) &= 0 \\ H(n+1) &= 1 + \prod_{i=0}^{n} H(i) \end{aligned}$$