Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 9: Teoría de Computabilidad

1. Probar que una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico es recursiva, es decir la función dada por la siguiente fórmula:

   $$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x))$ no es computable. (Sugerencia, considere la función:

   $$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Domf \\ \uparrow & \text{si } x \notin Domf \end{cases}$$

5. Probar que la siguiente función es computable, pero no es recursivo primitiva. $A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{si } x = 0 \\ A(x-1, 1) & \text{si } y = 0 \text{ y } x \neq 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & \text{si no} \end{cases}$

6. Probar que la siguientes funciones son parcialmente computable:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x,x)+1 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7. Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u,v,w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u,v,w,z) = \Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

8. *a*) Sea f la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x,y) = \psi_{h(x)}(y)$.

   b) Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.

   c) Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.

9. Probar que la siguiente función no es parcialmente computable:
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10. Decimos que una función parcialmente computable f es *extensible* si existe una función g computable tal que existe una función parcialmente computable g tal que $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio de f. Probar que existe una función parcialmente computable que no es extensible.

11. Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

   no es computable. Qué podría decir de f cuando g es total computable?.

12. Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo.

13. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{rango de } \psi_x\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \psi_x = \psi_y\}$.
c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.

14. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.

15. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

    a) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \backslash B$ es recursivo.
    b) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.

16. Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

17. Probar que las siguientes funciones no son computables.

    a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \Psi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
    b) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si Dom } \Psi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
    c) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x = \Psi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
    d) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Psi_x \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
    e) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in dom \Psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

18. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

    a) $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(0) \downarrow\}$.
    b) $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \downarrow\}$.
    c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$.

19. Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango f es B.

20. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable.

21. Probar nuevamente que que las funciones del ejercicio 17 no son computables, utilizando el teorema de Rice.