

Recuperatorio (2) Segundo Parcial

27/12/07

Sólo se pueden utilizar las macros y funciones primitivas recursivas definidas en el libro. En caso de duda, consulte.

1. Sea $raiz(x, y)$ la función definida por:

$$raiz(x, y) = \begin{cases} \lfloor \sqrt[y]{x} \rfloor & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

En particular $raiz(0, 0) = 0$. Por ejemplo $raiz(10, 0) = 1$, $raiz(10, 1) = 10$, $raiz(10, 2) = 3$, $raiz(10, 3) = 2$.

- a) Decidir si la función $raiz(x, y)$ es computable y demostrarlo.
 - b) Decidir si la función $raiz(x, y)$ es primitiva recursiva y demostrarlo.
2. Decimos que una función parcial es *escasa* si el dominio de f tiene menos de 100 elementos. Definimos el conjunto

$$A = \{y / \Phi_y \text{ es una función escasa}\}.$$

Analizar si A es recursivamente enumerable y si \bar{A} es recursivamente enumerable. Justificar.

3. Probar que el predicado

$$\begin{aligned} P(x) &= Halt(2 \cdot x, \lfloor x/3 \rfloor) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si el programa } \lfloor x/3 \rfloor \text{ termina al evaluarlo en } 2 \cdot x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

no es computable.

4. Sea $f(x, y, z)$ la función definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \Phi_y(x) & \text{si } \Phi_y(x) \downarrow \wedge \Phi_z(x) \downarrow \text{ y } \Phi_y(x) \text{ se calcula en } \leq \text{ pasos que } \Phi_z(x) \\ \Phi_y(x) & \text{si } \Phi_y(x) \downarrow \wedge \Phi_z(x) \downarrow \text{ y } \Phi_y(x) \text{ se calcula en } > \text{ pasos que } \Phi_z(x) \\ \Phi_y(x) & \text{si } \Phi_y(x) \downarrow \wedge \Phi_z(x) \uparrow \\ \Phi_z(x) & \text{si } \Phi_y(x) \uparrow \wedge \Phi_z(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi_y(x) \uparrow \wedge \Phi_z(x) \uparrow \end{cases}$$

Decidir si la función $f(x, y, z)$ es computable y probarlo.

5. Dados dos conjuntos recursivos A y B definimos el conjunto

$$C = \{a^b / a \in A, b \in B\}.$$

- a) Probar que si C es recursivo.
- b) Si sólo se sabe que A y B son recursivamente enumerables, probar que C es recursivamente enumerable.