Primer Parcial

24/10/2008

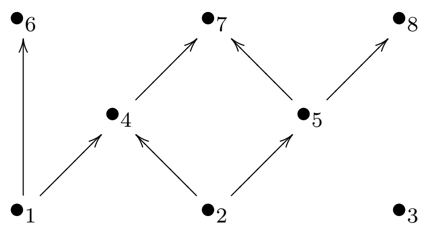
1. Decidir usando valuaciones o árboles si las siguiente fórmulas proposicionales son tautologías, contingencias o contradicciones.

   a) $(((\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge \neg (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\gamma \wedge \delta))$

   b) $(((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$

2. Encontrar tres fórmulas α, β y γ, tal que ninguna de ellas sea equivalente a ninguna de las otras y tales que las formulas $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$, $(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \alpha$ y $(\gamma \wedge \alpha) \rightarrow \beta$ sean todas tautologías.

3. Considerándo el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo) y una única constante c. Para la siguiente interpretación de $\leq$:



   a) Dar una fórmula α con una única constante c tal que α sólo sea verdadera al interpretar a c por 6.

   b) Considerando la fórmula

   $$\beta = \exists y\,(c \leq y \wedge \neg y \leq c \wedge \forall z\,(z \leq c \rightarrow (y \leq z \vee z \leq y)))$$

   ¿Por cuáles elementos del universo se puede interpretar a c para que sea β sea verdadera?

4. Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$ un conjunto infinito satisfactible de fórmulas de proposicionales, tal que el conjunto $\{\gamma_1 \wedge p_1, \gamma_2 \wedge p_2, \ldots, \gamma_n \wedge p_n, \ldots\}$ es insatisfactible, en donde $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ denotan las variables proposicionales. Probar que existe un número natural k tal que

   $$((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \rightarrow (\neg\gamma_1 \vee \neg\gamma_2 \vee \ldots \vee \neg\gamma_k))$$

   es una tautología.

5. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un predicado binario $\equiv$, un predicado unario P, una función binaria $\bullet$ y una constante u. Definimos

   $$\begin{aligned} \Gamma &= \{\forall x \forall y\,(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)\,, \forall x \forall y\,((P(x) \wedge x \equiv y) \rightarrow P(y))\,, \\ &\quad \forall x P\,(x \bullet x)\,, \forall x\,(x \bullet u \equiv x)\} \\ \alpha &= P(u). \end{aligned}$$

   a) Probar que $\Gamma \models \alpha$.

   b) Describa en castellano qué modela Γ y qué propiedad es α.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS.