Segundo Parcial

12/12/08

Sólo se pueden utilizar las macros y funciones primitivas recursivas definidas en el libro. En caso de duda, consulte.

1. Sea $cua\,(x)$ el predicado (total) que vale 1 si existen naturales a y b tales que $a^2 + b^2 = x$, y 0 si no.

   Por ejemplo $cua(0) = 1$, porque $0^2+0^2 = 0$; $cua(13) = 1$ porque $2^2+3^2 = 13$; y $cua(6) = 0$.

   a) Decidir si la función *cua* es computable y demostrarlo.

   b) Decidir si la función *cua* es primitiva recursiva y demostrarlo.

2. Decimos que una función f es una *casi contracción* si es total y además para todos los x se tiene que $f(x) \leq x$. Definimos el conjunto

   $$A = \{y \ / \ \Phi_y \text{ es una casi contracción}\}.$$

   Analizar si A y $\bar{A}$ son recursivamente enumerables. Justificar.

3. Decidir si la función $f(x,y) = Halt(x{\cdot}x{\cdot}y, x{\cdot}y{\cdot}y)$ es (totalmente) computable y demostrarlo.

   Nota: En $Halt(x,y)$ el parámetro y indica el número de programa y x indica el valor de la entrada.

4. Dado el conjunto

   $$B = \{y/\text{en el programa de número } y \text{ todos los saltos que aparecen son hacia adelante}\}.$$

   Analizar si B y $\overline{B}$ son recursivamente enumerables. Justificar.

   Notas: La codificación de cada instrucción es:

   $$\langle \#label, \langle \#acción, \#variable - 1\rangle\rangle \,.$$

   La instrucción $\mathsf{IF}\ \mathcal{V} \neq 0\ \mathsf{GOTO}\ label$ tiene asociado el número de acción $\#label + 2$.

5. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{N}$ definimos los conjuntos

   $$\begin{aligned} A^{\bullet} &= \{2 \cdot x \ / \ x \in A\} \\ A^{\diamondsuit} &= \{x \in \mathbf{N} \ / \ 2 \cdot x \in A\}\,. \end{aligned}$$

   a) ¿Es verdad que A es recursivamente enumerable si y sólo si $A^{\bullet}$ es recursivamente enumerable? Justificar.

   b) ¿Es verdad que A es recursivamente enumerable si y sólo si $A^{\diamondsuit}$ es recursivamente enumerable? Justificar.

   Nota: Por ejemplo, si $A = \{0, 1, 6, 11\}$ entonces $A^{\bullet} = \{0, 2, 12, 22\}$ y $A^{\diamondsuit} = \{0, 3\}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS.