Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 2: Semántica del Cálculo Proposicional

Notación Notaremos con Val al conjunto de las valuaciones.

Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son las primeras $n+1$ variables proposicionales, notaremos con $Form_n$ al subconjunto de $Form$ formado por las fórmulas α tales que $Var(\alpha) \subseteq \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$.

Dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v.

1. Sea $v : Form \to \{0,1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:

   a) $\alpha = (\neg p_1)$.
   b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.
   c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.
   d) $\alpha = (\neg p_4)$.
   e) $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.
   f) $\alpha = (p_1 \to p_1)$.

2. *a*) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin Var(\alpha)$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?

   1) $\alpha = ((\neg p_1) \to (p_3 \vee p_4))$.
   2) $\alpha = (\neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1)))$.
   3) $\alpha = (((\neg p_2) \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

   b) Para estas mismas fórmulas, hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?

3. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:

   a) El o exclusivo (XOR).
   b) El y exclusivo ($XAND$).
   c) $(p_1 \to (p_2 \to p_1))$.
   d) $((p_1 \to p_2) \to ((\neg p_2) \to (\neg p_1)))$.

4. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

a)

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b)

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

5. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Probar:

   a) $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

   b) $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

   c) $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

   d) Si $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

6. Sean $\alpha, \beta \in Form$.

   a) Probar que si $(\alpha \wedge \beta)$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

   b) Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.

7. Sea $\alpha \in Form$ tal que $(\alpha \vee p_i)$ es tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α. Probar que α tiene una sola variable proposicional.

8. (*) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in Form$ y sea $\sim$ la relación binaria definida en Val:

   $v_1 \sim v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

   a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Probar que el número de elementos del conjunto cociente $Val/\sim$ es menor o igual que 2^k.

   c) Para cada número natural $1 \leq n \leq 2^k$, encontrar un conjunto de k fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $Val/\sim$ tenga exactamente n elementos.

9. Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:
   a) $(p_1 \wedge p_2)$; $(\neg ((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$.
   b) $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
   c) $(p_1 \rightarrow p_2)$; $((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1))$.
10. Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes (ver Práctica 1).
    a) ¿Son necesariamente equivalentes?
    b) ¿Si α es una tautología, β es una tautología?
    c) ¿Si α es una contradicción, β es una contradicción?
    d) ¿Si α es una contingencia, β es una contingencia?
11. Dado un conjunto de conectivos, se dice que es *adecuado* si toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de este conjunto.
    a) Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.
    b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$.
12. *a*) Sea $\alpha \in Form$ tal que $\vee$ es el único conectivo que figura en α. Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que $\rightarrow$ sea el único conectivo que figure en γ.
    b) ¿Qué pasa se considera el conectivo $\wedge$ en lugar de $\vee$?
13. Si α y β son fórmulas, se define $\alpha|\beta$ como $((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$, conocida como barra de Sheffer (*NAND*); y se define $\alpha \downarrow \beta$ como $((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$, barra de Nicod (*NOR*).
    a) Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.
    b) Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.
14. (*) Probar que si $\{*\}$ es conjunto formado por un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ ó es $\downarrow$.
15. Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\bot\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conectivo 0-ario $\bot$, caracterizado por $v(\bot) = 0$ para toda valuación.
    a) Probar que $\{\bot, \rightarrow\}$ es adecuado.
    b) Si en lugar de agregar $\bot$, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo 0-ario $\top$, caracterizado por $v(\top) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?