Recuperatorio Primer Parcial

19/12/2008

1. Decidir usando valuaciones o árboles si las siguiente fórmulas proposicionales son tautologías, contingencias o contradicciones.

   a) $(((\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \vee ((\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$

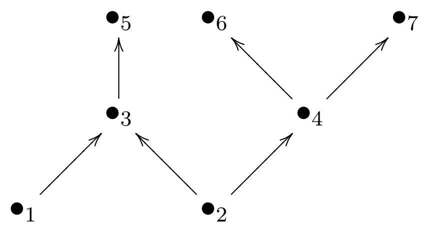
   b) $((\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \neg\beta) \wedge (\neg\delta) \wedge (\alpha \rightarrow (\delta \vee \gamma)) \wedge (\gamma \rightarrow (\delta \vee \neg\alpha)))$

2. La operación *revertir* se define a partir de las siguientes propiedades:

   $$r(p_i) = p_i \qquad r(\neg\alpha) = \neg\alpha \qquad r((\alpha * \beta)) = \boxed{(\beta * \alpha)}$$

   En donde p_i son las variables proposicionales y α y β son formulas proposicionales y $*$ representa a los símbolos $\wedge$, $\vee$ ó $\rightarrow$. Encontrar una formula γ que sea una tautología y que $r(\gamma)$ sea una contradicción.

3. Considerando el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo) y una única constante c. Para la siguiente interpretación de $\leq$:



   a) Dar una fórmula α con una única constante c tal que α sólo sea verdadera al interpretar a c por 1.

   b) ¿Por cuáles elementos del universo se puede interpretar a c en la siguiente formula β para que β sea verdadera?

   $\beta = \exists z\,((c \leq z \wedge \neg\,(z \leq c)) \wedge \forall y\,((c \leq y \wedge \neg\,(y \leq c)) \rightarrow (y \leq z \wedge z \leq y)))$

4. Sea Γ un conjunto infinito insatisfactible de fórmulas de proposicionales. A cada formula de Γ se le ha asignado un natural no nulo, de manera que $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$. Para cada número natural $n \geq 1$ se define el conjunto:

   $$\Gamma_n = \{\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n,\;\; \gamma_{n+1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{2n},\;\; \ldots,\;\; \gamma_{kn+1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{kn+n},\;\; \ldots\}$$

   Probar que existe un número natural n tal que Γ_n tiene una formula que es una contradicción.

5. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un predicado binario $\bowtie$, una función unaria f. Definimos

   $$\begin{aligned} \Gamma &= \{\forall x \forall y\,(x \bowtie y \rightarrow y \bowtie x)\,, \forall x \forall y\,(f(x) \bowtie f(y) \rightarrow x \bowtie y)\} \\ \alpha &= \forall x \forall y\,(f\,(f(x)) \bowtie f\,(f(y)) \rightarrow x \bowtie y)\,. \end{aligned}$$

   a) Probar usando árboles que $\Gamma \models \alpha$.

   b) Describa en castellano qué modela Γ y qué propiedad es α.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS.