Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 1: Lenguaje del Cálculo Proposicional

Notación: Si X es un conjunto, $\#X$ denota su cardinal; *Form* denota el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional y *Var* el conjunto de todas las variables proposicionales. Si $\alpha \in Form$,

- $l(\alpha)$ denota la longitud de α.
- $c(\alpha)$ denota la complejidad de α.
- $cb(\alpha)$ la complejidad binaria de α.
- $Var(\alpha)$ es el subconjunto de *Var* cuyos elementos son las variables proposicionales que figuran en α.
- $\#VarR(\alpha)$ es el número de variables proposicionales que figuran en α contadas tantas veces como aparecen.
- $s(\alpha)$ es el conjunto de subfórmulas de α.

1. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$, $S = \{p, q\}$, $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

   - Si $\beta \in A$ entonces β es una palabra.
   - Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geq 0)$ son palabras, las expresión $p\alpha_1 \ldots \alpha_n q$ también lo es.
   - Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.

   Se define el *peso* de una expresión como el número de p que aparecen en la expresión menos el número de q que aparecen en la expresión.

   a) Escribir cinco expresiones de Σ^* que no sean palabras y cinco que si lo sean.

b) Probar que las palabras de $\mathcal{L}$ son expresiones de peso 0.

c) ¿Es toda expresión de peso 0 una palabra?

d) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.

2. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$, $S = \{l\}$, $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

   - Si $\alpha \in A$, entonces α es una palabra.
   - Si $\chi_1, \ldots, \chi_n$ $(n \geq 0)$ son palabras, entonces $l\chi_1 \ldots \chi_n l$ es una palabra.
   - Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.

   a) Probar que si α es una palabra, entonces el número de l que figuran en α (contados tantas veces como aparecen) es un número par.

   b) ¿Toda expresión con una cantidad par de l es una palabra?

   c) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.

3. Decidir cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas del cálculo proposicional.

1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$	4) $(p_1 \vee (\neg p_2))$
2) $((p_1 \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow p_4)$	5) $((p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_5 \rightarrow p_2))$
3) $((\neg\neg p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2)$	6) $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_3)$

4. Probar que si α es una fórmula del cálculo proposicional, entonces α admite infinitas cadenas de formación.

5. Para cada una de las siguientes fórmulas encontrar todas las cadenas de formación minimales, sus árboles de formación y enumerar su conjunto de subfórmulas.

   a) $((p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow p_4)$

   b) $((p_1 \vee (p_5 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((\neg p_1) \rightarrow (\neg p_2)))$ $\boxed{\text{paréntesis agregados}}$

   c) $(((\neg p_1) \vee p_5) \vee (p_1 \wedge (\neg p_2)))$ $\boxed{\text{paréntesis agregados}}$

6. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, mostrar que existe $\alpha \in \mathit{Form}$ tal que $\#s(\alpha) = n$.

7. (*) Sea $\alpha \in \mathit{Form}$. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces β aparece en toda cadena de formación de α.

8. (*) Probar que si $\alpha \in Form$, C es una cadena de formación minimal de α y β es un eslabón de C, entonces β es subfórmula de α.

9. Sea $\alpha \in Form$, tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.

10. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si $\alpha \in Form$ tal que $c(\alpha) = n$, ¿existe una subfórmula de α con grado de complejidad k?

11. Sea $\alpha \in Form$. Probar las siguientes relaciones

    a) $\#VarR(\alpha) = cb(\alpha) + 1$
    b) $\#Var(\alpha) \leq cb(\alpha) + 1$
    c) $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#Var(\alpha)$

12. Sea $\alpha \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Llamamos $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ a tal sustitución.

13. Sean $\alpha, \gamma \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Diremos que α y γ son *sintácticamente equivalentes* y lo notaremos $\alpha \sim \gamma$ si existen $q_1, \ldots, q_n \in Var$ tales que $q_i \neq q_j$ si $i \neq j$, y $\alpha(q_1, \ldots, q_n) = \gamma$.

    a) Probar que es una relación de equivalencia en *Form*.
    b) Probar que si $\alpha \sim \gamma$, entonces α y γ tienen ~~la misma longitud,~~ la misma complejidad y la misma complejidad binaria.

14. Sea $\alpha \in Form$. Notaremos con $\alpha_\neg$ a la expresión que se obtiene al eliminar todas las apariciones del símbolo $\neg$ en α y sus correspondientes paréntesis. (Por ejemplo, si $\alpha = (\neg(p_2 \vee (\neg p_3)))$, entonces $\alpha_\neg = (p_2 \vee p_3)$.)

    a) Definir formalmente $\alpha_\neg$ para toda $\alpha \in Form$.
    b) Probar que si $\alpha \in Form$, entonces $\alpha_\neg \in Form$.
    c) Analizar cuáles de las siguientes igualdades se cumplen para toda $\alpha \in Form$:

1) $l(\alpha) = l(\alpha_\neg)$	4) $\#Var(\alpha) = \#Var(\alpha_\neg)$
2) $c(\alpha) = c(\alpha_\neg)$	5) $\#VarR(\alpha) = \#VarR(\alpha_\neg)$
3) $cb(\alpha) = cb(\alpha_\neg)$	6) $\#s(\alpha) = \#s(\alpha_\neg)$