

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 10: Conjuntos Computables

1. En cada ejercicio, buscar una solución que utilice el teorema de Rice y otra que no lo utilice, cuando sea posible.
2. Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo.
3. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:
 - a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{rango de } \psi_x\}$.
 - b) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \psi_x = \psi_y\}$.
 - c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.
4. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.
5. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - a) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \setminus B$ es recursivo.
 - b) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.
6. Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.
7. Probar que las siguientes funciones no son computables.
 - a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
 - b) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Psi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x = \Psi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Psi_x \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

$$a) \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(0) \downarrow\}.$$

$$b) \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \downarrow\}.$$

$$c) \{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}.$$

9. Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango f es B .

10. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{Dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

11. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \text{ se puede computar en menos de } x \text{ pasos}\}$ es recursivo.

12. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{el programa con índice } x \text{ tiene menos de } x \text{ líneas}\}$ es recursivo.

13. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) = 0\}$ ¿es recursivo?

14. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) < x\}$ ¿es recursivo?