# COMPLEMENTOS – FISICA

## Práctica 5

## Autovalores y Autovectores – Diagonalización

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $A$ en cada uno de los siguientes casos:
(Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ viii) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ ix) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 2.** Para cada una de las matrices $A$ del ejercicio anterior, sea $U$ una base de $K^n$ y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base $B$ de $K^n$ tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

**Ejercicio 3.** Sean $A$, $C$ y $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = C.D.C^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = C.D^n.C^{-1}$

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2.y + 6.z, 4.y, -x - 3.y + 4.z)$$

i) Encontrar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 5.** Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que $f$ es diagonalizable (ver Ejercicio 17 de la práctica 3). Calcular $\mathcal{X}_f$.

**Ejercicio 6.** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los $a$ , $b$ y $c \in K$ para los que $A$ es diagonalizable.

**Ejercicio 7.** Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 4\,,\ a_1 = 9 \\ a_{n+2} = 5.a_{n+1} - 6.a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

i) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

ii) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n.\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

iii) Encontrar una matriz inversible $P$ tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.

iv) Hallar la fórmula general para el término $a_n$ , $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

**Ejercicio 9.** Encontrar una fórmula general para el término $a_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

en los siguientes casos:

i) $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$

ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$

**Ejercicio 10.** Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias (es decir, encontrar una fórmula general para los términos $x_n$ e $y_n$ en función de $x_0$ e $y_0$):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

**Ejercicio 11.**

i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

ii) Probar que $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} =< e^x, e^{-x} >$.
Sugerencia: Llamar $g = f'$ y considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$

**Ejercicio 12.** Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de $\delta$ asociado al autovalor $\lambda$. (Observar que entonces $\delta$ tiene infinitos autovalores.)

**Ejercicio 13.** Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A$ y $A^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

ii) Probar que si $A$ es inversible, entonces 0 no es autovalor de $A$; y si $x$ es un autovector de $A$, entonces $x$ es un autovector de $A^{-1}$.