COMPLEMENTOS – FISICA

Práctica 7

Subespacios invariantes

Ejercicio 1. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X-1)^2$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

Ejercicio 2. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

Ejercicio 3. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

Ejercicio 4. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$.

Ejercicio 5.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x,y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ:
$$|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es
$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

ii) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathcal{X}_A = (x - \alpha).(x - z).(x - \bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = A.x$.

i) Probar que existe v_1, autovector de g_A de autovalor α, con todas sus coordenadas reales.

ii) Sea $w = v_2 + i.v_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z. Probar que $\overline{w} = v_2 - i.v_3$ es un autovector de g_A de autovalor $\bar{z}$.

iii) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = A.x$. Probar que $< v_2, v_3 > \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A-invariante de dimensión 2.

iv) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $|f_A|_B$.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = A.x$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.