COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Segundo cuatrimestre de 2002

$\boxed{\textbf{Práctica 1}}$ **- Repaso de sistemas de ecuaciones lineales y matrices**

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: $(K = \mathbb{R})$

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{v)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

Ejercicio 2. Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Probar:

i) Si $n < m$, entonces H tiene alguna solución no nula.

ii) Si $m < n$, entonces existe un sistema lineal homogéneo H' de m ecuaciones con m incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de H.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejercicio 5. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

Ejercicio 6. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

Ejercicio 7. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Ejercicio 8. Tres especies de bacterias coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan con alimentos de tres tipos. Supongamos que la cantidad a_{ij} del $i-$ésimo alimento consumida diariamente por una bacteria de la especie j está dada por la siguiente matriz de datos

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se proveen diariamente 15000 unidades del alimento 1, 30000 del alimento 2, 60000 del alimento 3 y todo el alimento provisto se consume.

i) ¿Puede determinarse con estos datos la cantidad de bacterias de cada especie?

ii) ¿Puede determinarse la cantidad total de bacterias?

iii) ¿Es posible una población de 10000 bacterias de la tercera especie? ¿Es posible una población de 2000 bacterias de la primera especie? En caso afirmativo, hallar las cantidades de bacterias de las especies restantes.

Ejercicio 9. En un sistema económico con 3 industrias se denota con a_{ij} el número de unidades del producto de la industria i necesarias para producir 1 unidad del producto j ($i, j \in \{1, 2, 3\}$), y con e_i se denota el número de unidades del producto de la industria i que se demandó desde el exterior del sistema.

Si cada industria produce exactamente la cantidad total demandada de su producto, calcular dichas producciones cuando $e_1 = 10$, $e_2 = 25$, $e_3 = 20$ y

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Matrices

Ejercicio 10.

i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para $K^{2\times 2}$ y usar multiplicación por bloques.)

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} / \, A \cdot B = B \cdot \quad \forall\, B \in K^{3\times 3}\}$.

Ejercicio 11.

i) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$

ii) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones $\forall n \geq 2$:

a) $(A \cdot B)^2 = A^2 B^2$
b) $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
c) $A \cdot B = A \cdot C$ y A $\neq 0 \Rightarrow$ B = C
d) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B \cdot A = 0$
e) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
f) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

iii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$

Ejercicio 12. Si A, $B \in K^{m\times n}$ y $A \cdot x = B \cdot x \;\forall\, x \in K^{n\times 1}$, probar que $A = B$.

Ejercicio 13. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{v)} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{vi)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$

ii) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 15. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

i) A, $B \in K^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible

ii) Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in K^{n\times n}$ que cumple que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}, \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Entonces A inversible $\iff$ A^t inversible.

iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0) \Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 16. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^{n\times 1}$. Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff$ A inversible.