

## COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Segundo cuatrimestre de 2002

### Práctica 2 - Espacios vectoriales

A lo largo de esta práctica,  $K$  simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

**Ejercicio 1.** Probar en cada caso que el conjunto  $V$ , con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre  $K$ :

i)  $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in K \forall i \in \mathbb{N}\}$ , el conjunto de todas las sucesiones de elementos de  $K$ .

$$+ : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\cdot : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

ii) Dado  $X$  un conjunto, sea  $V = K^X = \{f : X \rightarrow K \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$ .

$$+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

$$\cdot : (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in X$$

**Ejercicio 2.** Caracterizar geoméricamente todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 3.** Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de  $V$  como  $K$ -espacio vectorial:

i)  $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (1, 1, 1) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $K = \mathbb{R}$

ii)  $S_2 = \{a \cdot i / a \in \mathbb{R}\}$ ,  $V = \mathbb{C}$ ,  $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$

iii)  $S_3 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr} f \geq 2\}$ ,  $V = K[X]$

iv)  $S_4 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr} f \leq 5\}$ ,  $V = K[X]$

v)  $S_5 = \{M \in K^{4 \times 4} / M^t = M\}$ ,  $V = K^{4 \times 4}$

vi)  $S_6 = \{M \in K^{3 \times 3} / \text{tr}(M) = 0\}$ ,  $V = K^{3 \times 3}$

vii)  $S_7 = C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

viii)  $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''(1) = f(2)\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

ix) Dados  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$  fijos,  $S_9 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

x)  $S_{10} = \{f \in C(\mathbb{R}) / \int_0^1 f(x) dx = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

xi)  $S_{11} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\}$ ,  $V = K^{\mathbb{N}}$

**Ejercicio 4.** Sea  $A \in K^{n \times m}$  y sea  $S = \{x \in K^m : A \cdot x = 0\}$  el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es  $A$ . Probar que  $S$  es un subespacio de  $K^m$ .

**Ejercicio 5.** Sean  $S$  y  $T$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ :

i) Probar que  $S \cap T$  es un subespacio de  $V$ .

ii) Encontrar  $S$  y  $T$  subespacios de  $V = \mathbb{R}^2$  tales que  $S \cup T$  no sea subespacio.

(\*) iii) Probar que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$ .

**Ejercicio 6.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre  $K$ :

i)  $K^n$

ii)  $K_n[X] = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$

iii)  $K[X]$

iv)  $K^{n \times n}$

v)  $\mathbb{C}^m$ ,  $K = \mathbb{R}$

vi)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

vii)  $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

viii)  $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

ix)  $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

**Ejercicio 7.** Sea  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

i) Determinar si  $(2, 1, 3, 5) \in S$

ii) Determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

iii) Determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$

**Ejercicio 8.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v_1, v_2, v_3 \in V$ .

Probar que si  $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$  entonces  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle$ .

**Ejercicio 9.** Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

i) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v, w \in V$ . Entonces  $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$

ii) Sean  $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$  tales que  $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$ . Entonces  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$

iii) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v_1, v_2, v_3, w \in V$ .

$\langle v_1, v_2, v_3, w \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \iff w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

(\*) **Ejercicio 10.** Probar que  $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + f = 0\} = \langle \sin x, \cos x \rangle$ .

(Sugerencia: Probar que si  $f'' + f = 0$ , entonces  $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})\sin x}{\cos x}$  es una función constante en el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .)

**Ejercicio 11.** Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre  $K$ :

i)  $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $K = \mathbb{R}$

ii)  $(1 - i, i), (2, -1 + i)$  en  $\mathbb{C}^2$  para  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

iii)  $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$  en  $K[X]$

iv)  $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

v)  $f(x) = e^x, g(x) = x, h(x) = e^{-x}$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $K = \mathbb{R}$

vi)  $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$  en  $K^{\mathbb{N}}$

**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Probar:

i)  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

ii)  $\lambda \in K, \lambda \neq 0$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

iii)  $\lambda \in K$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en  $K^n$ .

**Ejercicio 13.** Hallar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  es un conjunto linealmente independiente:

- i)  $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\}$
- ii)  $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\}$

**Ejercicio 14.** Hallar una base y la dimensión de los siguientes  $K$ -espacios vectoriales

- i)  $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$ ,  $K = \mathbb{R}$
- ii)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- iii)  $\mathbb{C}$ ,  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- iv)  $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f(2) = f(-1)\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- v)  $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f \text{ es un múltiplo de } (x^2 - 2)\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- vi)  $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \forall i, j\}$

**Ejercicio 15.**

- i) Probar que el conjunto  $\{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, 1, i)\}$  es base de  $\mathbb{C}^3$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial pero no como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Calcular la dimensión de  $\mathbb{C}^3$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- ii) Probar que el conjunto  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $\mathbb{C}^n$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial pero no como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- iii) Probar que  $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$  es una base de  $\mathbb{C}^n$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de  $\mathbb{C}^n$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial?

**Ejercicio 16.** Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del  $K$ -espacio vectorial  $V$  indicado:

- i)  $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $K = \mathbb{R}$
- ii)  $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$ ,  $V = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $K = \mathbb{R}$
- iii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 17.** Extraer una base de  $S$  de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

- i)  $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $K = \mathbb{R}$
- ii)  $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$ ,  $K = \mathbb{R}$
- iii)  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 18.** Hallar la dimensión del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $S$  para cada  $k \in \mathbb{R}$  en los siguientes casos:

- i)  $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$
- ii)  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- iii)  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = 0\}$  siendo  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k - 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 19.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle.$$

**Ejercicio 20.** En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios  $S \cap T$  y  $S + T$  de  $V$ . Determinar si la suma es directa:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z)/3 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z)/3 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0, x - y = 0\}$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
- iii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
- (\* iv)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(1) = 0\}$  y  $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
- (\* v)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(0) = 0\}$  y  $T = \{f \in \mathbb{R}[X]/f'(0) = f''(0) = 0\}$

**Ejercicio 21.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ , siendo  $S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$ .

**Ejercicio 22.**

- i) Sean  $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(0) = 0\}$  y  $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f \text{ es constante}\}$ . Probar que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  y que  $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- ii) Sean  $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$  y  $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$  (los elementos de  $S$  se llaman *funciones pares* y los de  $T$ , *funciones impares*). Probar que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  y  $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- iii) Sean  $S = \{A \in K^{n \times n}/A = A^t\}$  y  $T = \{A \in K^{n \times n}/A = -A^t\}$  (los elementos de  $S$  se llaman *matrices simétricas* y los de  $T$ , *matrices antisimétricas*). Probar que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $K^{n \times n}$  y  $S \oplus T = K^{n \times n}$ .

**Ejercicio 23.** Para cada  $S$  dado hallar  $T \subseteq V$  tal que  $S \oplus T = V$  (en este caso,  $T$  se dice un *suplemento* de  $S$  con respecto a  $V$ ):

- i)  $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}^4$
- ii)  $S = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}/\text{tr}(A) = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{4 \times 4}$
- iii)  $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}_4[X]$

**Ejercicio 24.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

- i)  $S, T$  subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$  tal que  $v \in S \cap T$
- ii)  $S, T, W$  subespacios de  $\mathbb{R}^5$ ,  $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

(\* **Ejercicio 25.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $T$  un hiperplano de  $V$  (es decir, un subespacio de dimensión  $n - 1$ ):

- i) Probar que  $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$ .
- ii) Si  $S$  es un subespacio de  $V$  tal que  $S \not\subseteq T$ , probar que  $S + T = V$ .  
Calcular  $\dim(S \cap T)$ .
- iii) Si  $S$  y  $T$  son dos hiperplanos distintos, deducir  $\dim(S \cap T)$ .

**Ejercicio 26.** Encontrar las coordenadas de  $v \in V$  respecto de la base  $B$  en los siguientes casos:

- i)  $V = K^n$ ;  $v = (x_1, \dots, x_n)$  y  $B = E$  la base canónica
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ;  $v = (1, 2, -1)$  y  $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

- iii)  $V = \mathbb{R}^3$  ;  $v = (1, -1, 2)$  y  $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
- iv)  $V = \mathbb{R}^3$  ;  $v = (x_1, x_2, x_3)$  y  $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
- v)  $V = \mathbb{R}_3[X]$  ;  $v = 2X^2 - X^3$  y  $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$
- vi)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ;  $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  y  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

**Ejercicio 27.** En cada uno de los siguientes casos, calcular  $C(B, B')$ , hallar las coordenadas de  $v$  respecto de  $B$  y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de  $v$  respecto de  $B'$ :

- i)  $V = \mathbb{R}^2$  ,  $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$  ,  $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$  ,  $v = (2, 3)$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$  ,  $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$  ,  $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$  ,  
 $v = (-1, 5, 6)$
- iii)  $V = \mathbb{R}_2[X]$  ,  $B = \{3, 1 + X, X^2\}$  ,  $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$  ,  $v = X$
- iv)  $V = \mathbb{R}^4$  ,  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ,  $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$  ,  $v = 2.v_1 + 3.v_2 - 5.v_3 + 7.v_4$
- v)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ,  $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$  (la matriz  $E^{ij}$  es la matriz que tiene un 1 en el lugar  $ij$  y 0 en todos los demás lugares),

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}, v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 28.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean  $B$ ,  $B'$  y  $B''$  bases de  $V$ . Probar que  $C(B, B'') = C(B', B'') \cdot C(B, B')$ . Deducir que  $C(B, B')$  es una matriz inversible con  $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$ .

**Ejercicio 29.** Sean  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$  dos bases de  $K^n$ . Sea  $M$  la matriz cuyas columnas son  $v_1, \dots, v_n$  y sea  $N$  la matriz cuyas columnas son  $w_1, \dots, w_n$  (ordenadamente). Probar que  $C(B, B') = N^{-1}M$ .