Complementos Matemática 3 (CA, F, O)

Práctica 1: Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$, $v \in$ V. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $0v = \vec{0}$

   b) $k\vec{0} = \vec{0}$

   c) $(-1)v = -v$

   d) $-(-v) = v$

   e) $kv = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$

   f) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

   a) V $= \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) / a_i \in \mathbb{K}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.

      1) $+ : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$
      2) $\cdot : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

   b) Dado X un conjunto, sea V $= \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}$ tal que f es una función$\}$.

      1) $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$
      2) $\cdot : (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall\, x \in X$

3. Caracterizar geométricamente todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

4. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

   a) $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a(1,0,0) + b(1,1,1)\,;\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   b) $S_2 = \{ai / a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   c) $S_3 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0$ ó $\operatorname{gr} f \geq 2\}$, $V = \mathbb{K}[X]$

   d) $S_4 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0$ ó $\operatorname{gr} f \leq 5\}$, $V = \mathbb{K}[X]$

   e) $S_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4 \times 4} / M^t = M\}$, $V = \mathbb{K}^{4 \times 4}$

   f) $S_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3 \times 3} / \operatorname{tr}(M) = 0\}$, $V = \mathbb{K}^{3 \times 3}$

   g) $S_7 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   h) $S_8 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   i) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_9 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

j) $S_{10} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

k) $S_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$, $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{K}^m$.

6. Sean S y T subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V:

   a) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

   b) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

   c) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V $\iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

   a) $\mathbb{K}^n$

   b) $\mathbb{K}_n[X] = \{f \in \mathbb{K}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq n\}$

   c) $\mathbb{K}[X]$

   d) $\mathbb{K}^{n\times n}$

   e) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   f) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\ ;\ x - y = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   g) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A = -A^t\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   h) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] \,/\, f(1) = 0$ y $f(2) = f(3)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   i) $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

8. Sea $S = < (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) > \ \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

   b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

   c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

9. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3 \in V$.

   Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $< v_1, v_2, v_3 > = < v_3 >$.

10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

    a) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v, w \in V$.

    Entonces $< v, w > = < v, w + 5v >$.

b) Sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,v_4\,,\,w\;\in\mathbb{R}^7$ tales que $<v_1\,,\,v_2\,,\,w>=<v_3\,,\,v_4\,,\,w>$.
Entonces $<v_1\,,\,v_2>=<v_3\,,\,v_4>$.

c) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w\,\in$ V.
$<v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w>=<v_1\,,\,v_2\,,\,v_3>\iff\; w\in<v_1\,,\,v_2\,,\,v_3>$

11. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$:

a) $(1,2,3)\,,\,(2,3,1)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)$ en $\mathbb{R}^3\,,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$
b) $(1-i,i)\,,\,(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
c) $(1-X)^3\,,\,(1-X)^2\,,\,1-X\,,\,1$ en $\mathbb{K}$[X]
d) $f(x)=\sin x\,,\,g(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$
e) $f(x)=e^x\,,\,g(x)=x\,,\,h(x)=e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$
f) $u=(1,0,1,0,1,\dots)\,,\,v=(0,1,0,1,0,\dots)\,,\,w=(1,1,0,1,1,0,\dots)$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Probar:

a) $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i.
b) $\lambda\in\mathbb{K}\,,\ \lambda\neq 0$
$\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i.
c) $\lambda\in\mathbb{K}$
$\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en $\mathbb{K}^n$.

13. Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente:

a) $\{(1,2,k)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,1-k)\}$
b) $\{(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)\}$

14. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{K}$-espacios vectoriales

a) $<(1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7)>,\;\; \mathbb{K}=\mathbb{R}$
b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,/\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}\;,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$
c) $\mathbb{C}\;,\quad\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
d) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}\,(f)\leq 3$ y $f(2)=f(-1)\}\;,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$
e) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}\,(f)\leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2-2)\}\;,\,\mathbb{K}=\mathbb{R}$

f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, a_i = a_j \;\forall\, i, j\,\}$

15. *a*) Probar que el conjunto $\{(1,0,0)\,,\,(0,i,0)\,,\,(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

    b) Probar que el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

    c) Probar que $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V indicado:

    a) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, V $= \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    b) $\{X^3 - 2X + 1\,,\, X^3 + 3X\}$, V $= \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, V $= \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

17. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

    a) S $= \,<(1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)> \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    b) S $= \,<X^2 + 2X + 1\,,\, X^2 + 3X + 1\,,\, X + 2> \subseteq \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    c) S $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

18. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) S $= \,<(1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k)> \subset \mathbb{R}^3$

    b) S $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

    c) S $= \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$<(-2,1,6),(3,0,-8)> \; = \; <(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)> .$$

20. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa:

a) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\}$ y $T = \{(x,y,z)/x+z=0\}$

b) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\,,\, x-y=0\}$ y $T = <(1,1,0),(5,7,3)>$

c) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = <(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24)>$ y $T = <(1,1,0),(3,2,1)>$

d) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(1)=0\}$ y $T = <1\,,\,\mathrm{X}\,,\,\mathrm{X}^2\,,\,\mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}\,,\,\mathrm{X}^5>$

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f'(0)=f''(0)=0\}$

21. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = <(0,1,1)>$, siendo

$S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1+x_2-x_3=0\}$ y $T = <(1,k,2),(-1,2,k)>$.

22. *a*) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

    b) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n\times n}$.

23. Para cada S dado hallar T $\subseteq$ V tal que S $\oplus$ T $=$ V (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

    a) $\mathrm{S} = <(1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7)>$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$

    b) $\mathrm{S} = \{A \in \mathbb{R}^{4\times4} /\ \mathrm{tr}\,(A)=0\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{4\times4}$

    c) $\mathrm{S} = <3, 1+X^2>$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$

24. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

    a) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, dim S $=$ dim T $= 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in$ S $\cap$ T

    b) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, dim S $=$ dim T $=$ dim W $= 2 \Rightarrow$ dim (S $\cap$ T $\cap$ W) ≥ 1

25. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$):

    a) Probar que $\forall\, v \notin$ T , T $\oplus <v>=$ V.

    b) Si S es un subespacio de V tal que S $\not\subseteq$ T, probar que S $+$ T $=$ V.
    Calcular dim (S $\cap$ T).

    c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir dim (S $\cap$ T).

26. Encontrar las coordenadas de $v \in$ V respecto de la base B en los siguientes casos:

    a) $\mathrm{V} = \mathbb{K}^n$; $v = (x_1,\ldots,x_n)$ y $B = E$ la base canónica *b*) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,-1)$ y $B = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$

c) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1,-1,2)$ y $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,-3)\}$

d) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1,x_2,x_3)$ y $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,-3)\}$

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\,1+X\,,\,X^2+5\,,\,X^3+X^2\}$

f) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

27. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B,B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B':

a) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,2)\}$, $B' = \{(-1,3),(2,5)\}$, $v = (2,3)$

b) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$, $v = (-1,5,6)$

c) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\,1+X\,,\,X^2\}$, $B' = \{1\,,\,X+3\,,\,X^2+X\}$, $v = X$

d) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $B' = \{v_3,v_1,v_4,v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11},E^{12},E^{21},E^{22}\}$

E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares.

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

28. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B'' bases de V.
Probar que $C(B,B'') = C(B',B'')C(B,B')$. Deducir que $C(B,B')$ es una matriz inversible con $C(B,B')^{-1} = C(B',B)$.

29. Sean $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $B' = \{w_1,\ldots,w_n\}$ dos bases de $\mathbb{K}^n$. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1,\ldots,v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1,\ldots,w_n$ (ordenadamente). Probar que $C(B,B') = N^{-1}M$.