Complementos Matemática 3 (CA, F, O)

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3 \,,\, 0 \,,\, 3x_2 + 2x_3)$.

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 \,,\, 2x_2 \,,\, 1 + x_1)$.

   c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

   d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

   e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$.

   f) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$.

2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

   a) $f(x, y) = (x, 0)$.

   b) $f(x, y) = (0, y)$.

   c) $f(x, y) = (x, -y)$.

   d) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$.

   e) $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t \,,\, x \sin t + y \cos t)$.

3. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

   a) $tr : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$.

   b) $t : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{m\times n}$, $t(A) = A^t$.

   c) $f : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{r\times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$.

   d) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$.

   e) $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

   f) $\epsilon_\alpha : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$.

4. *a*) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$

   b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

   c) Sean f , $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.

d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2, a, -1)$, $f(1,-1,2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

5. *a*) Calcular el núcleo y la imagen de cada tranformación lineal de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .

   b) Clasificar las transformaciones lineales tr , t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$.

   Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

7. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

   a) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

   b) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

   c) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

   d) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

8. *a*) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

   b) Sean $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

   c) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

   d) Sean S , $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/2x_1 + x_4 = 0\,,\ x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

   e) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

   1) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = < (1,2,1) >$

   2) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T = < (1,-2,1) >$

9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

   a) $(1,1,0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

   b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = < (1,1,2) >$.

   c) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

   d) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.

   e) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$.

   f) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

10. Sea $S =< (1,1,0,1),(2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

    a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu(f) = S$.

    b) Hallar ecuaciones para S (usar i)).

    c) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1,1,0,1),(2,1,0,1) > + (0,1,1,2)$.

11. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to \mathbb{K}^n$ de la siguiente manera:

    $$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \ , \quad \alpha_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$$

    Probar que α_B es un isomorfismo. Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

    a) $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \ldots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{K}^n$

    b) $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \ldots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de
    K^n

    c) $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \ldots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$

       Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1 \ , \ X^2 - 3X + 5 \ , \ 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1,-1,1) \ , \ (1,-3,5) \ , \ (2,2,-3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para lo que se puede usar el método de triangulación.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. f se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.

    Probar que $f : V \to V$ es un proyector $\iff f(v) = v \ \ \forall\, v \in \operatorname{Im}(f)$.

13. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

    a) $\operatorname{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\operatorname{Im}(f) =< (-2,1,1) >$

    b) $\operatorname{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\operatorname{Im}(f) =< (1,1,1) >$

14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que

    a) $V = \operatorname{Nu}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

    b) Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\operatorname{Nu}(f) = S$ e $\operatorname{Im}(f) = T$.

15. Dada $f : V \to V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$

1) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2) $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

b) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$

1) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

2) $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

c) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$

1) $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

2) $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

d) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

16. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

b) Hallar una base de Nu(f) y una base de Im(f).

c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

17. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique:

a) $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$.

b) $A \neq 0$; $A \neq I_3$ y $A^2 = A$.

18. Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $Ax = b$ cumpla:

a) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b.

b) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b.

c) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b.

d) Tiene solución única, independientemente del valor de b.

19. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$\left(|f|_B\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \ ; \ i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: Recordar que, si f es un proyector, $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.)

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)\,.$$

a) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

23. *a*) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^n \,/\, Ax = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$.
(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

b) Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$. Se considera el sistema $Ax = b$ y sea $(A\,|\,b)$ su matriz ampliada. Probar que $Ax = b$ tiene solución $\iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,b)$.

24. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$. Probar que

$$\mathrm{rg}(AB) \le \mathrm{rg}(A) \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(AB) \le \mathrm{rg}(B)\,.$$