

COMPLEMENTOS MATEMÁTICA 3 (CA, F, O)

Práctica 3: Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{v) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{vi) } \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2. a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

b) Calcular el determinante de $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$ y $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$, sea $M \in \mathbb{K}^{(n+m) \times (n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

b) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i , $1 \leq i \leq n$ sea $A_i \in \mathbb{K}^{r_i \times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

Calcular $\det(M)$.

4. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

5. Probar que el determinante de la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$. (Por esta causa, la matriz A se llama la matriz **compañera del polinomio** $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$.)

6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible tal que $AC = CB$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

8. a) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Probar que la función $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

b) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $\langle v_1, v_2 \rangle$.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que $\det(A + B) = \det(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

10. a) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

b) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$.

11. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita. Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.

12. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } \begin{pmatrix} \cos & 0 & -\sin \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin & 0 & \cos \end{pmatrix}$$

13. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det(\text{adj } A)$ ¿Qué pasa si A no es inversible?

14. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre \mathbb{R} empleando la regla de Cramer:

$$\text{i) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0$$

Calcular $\det A$.

16. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

a) Probar que son equivalentes:

1) $\text{rg}(A) \geq s$

2) A admite una submatriz de $s \times s$ con determinante no nulo

b) Deducir que $\text{rg}(A) = \max \{s \in \mathbb{N}_0 / A \text{ admite una submatriz de } s \times s \text{ con determinante no nulo}\}$

17. Sea $A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ no inversible tal que $A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in \mathbb{K}^3 / Ax = 0\}$.