

COMPLEMENTOS MATEMÁTICA 3 (CA, F, O)

Práctica 4: Autovalores y autovectores - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

(Analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{v) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{viii) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de χ_A contadas con multiplicidad.

a) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

b) Probar que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

3. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

b) Probar que si A es inversible, entonces 0 no es autovalor de A ; y si x es un autovector de A , entonces x es un autovector de A^{-1} .

4. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X - 1)^2$

b) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

5. Sean A, C y $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tales que $A = CDC^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = CD^nC^{-1}$

6. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

8. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vi) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ix) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

9. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], f(P) = P' + 2.P$

b) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, f(A) = A^t$

10. Sea $\delta: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación.

a) Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de δ asociado al autovalor λ . (Observar que entonces δ tiene infinitos autovalores.)

b) Mostrar que no existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $P(\delta) = 0$.

11. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

12. Para cada una de las matrices A del ejercicio 1, sea U una base de \mathbb{K}^n y sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ la transformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de \mathbb{K}^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

a) Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $|f|_B$ sea diagonal.

b) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$. Determinar todos los a , b y $c \in \mathbb{K}$ para los que A es diagonalizable.

15. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}$$

16. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

17. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. ¿Es A única?

18. a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalizable con $\text{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A , sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8 .

- b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A .
19. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.
20. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
21. Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de \mathbb{C}^n tal que $|f|_B$ es triangular superior.
22. Sean A, B y $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
- a) Probar que si D es una matriz diagonal que sólo tiene unos y ceros en la diagonal entonces $\chi_{AD} = \chi_{DA}$.
- b) Probar que para toda B , $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Sugerencia: usar equivalencia (no semejanza) de matrices.

23. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f .
24. Sea $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0).$$

- a) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de \mathbb{R}^5 con $\dim(S_i) = i$ que sea f -invariante.
- b) Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de \mathbb{R}^5 tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.
25. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\chi_A = (x - \alpha)(x - z)(x - \bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = Ax$.
- a) Probar que existe v_1 , autovector de g_A de autovalor α , con todas sus coordenadas reales.
- b) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z . Probar que $\bar{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor \bar{z} .
- c) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = Ax$. Probar que $\langle v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A -invariante de dimensión 2.
- d) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de \mathbb{R}^3 y hallar $|f_A|_B$.

26. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$f_A(x) = Ax$. Hallar subespacios propios S y T de \mathbb{R}^3 , f_A -invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

27. a) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

b) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.