

COMPLEMENTOS MATEMÁTICA 3 (CA, F, O)

Práctica 5: Forma de Jordan

1. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

3. Dadas las matrices A y A' en $\mathbb{K}^{6 \times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_5[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- c) Calcular A^k para cada $k \in \mathbb{N}$.
4. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .
5. Sean A_i ($1 \leq i \leq 6$) matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?
6. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?
7. a) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- b) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

8. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -10 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, hallar la forma y una base de Jordan de A .

10. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B

11. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

b) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $m_A(X) = (X-7)^2$

c) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $m_A(X) = (X-2)^3$

d) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

12. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\text{rg}(A - \lambda_1 Id) = 13, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_2 Id) = 13, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_3 Id) = 13, \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12, \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11.$$

Hallar su forma de Jordan.

13. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

14. Sea $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A -invariantes.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la forma y una base de Jordan para A .

b) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

16. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

17. Sea $T : V \rightarrow V$ lineal V \mathbb{C} -e.v. de dimensión finita. Probar que existen $D, N : V \rightarrow V$ lineales tales que D es diagonalizable, N nilpotente, $DN = ND$ y $T = N + D$. ¿Son N y D únicos?

18. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$m_A = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)^2(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j), \quad \text{rg}(A - \lambda_1 I) = 11, \\ \text{rg}(A - \lambda_1 I)^2 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 I) = 12, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 I)^2 = 10 \quad \text{y} \quad \text{rg}(A - \lambda_4 I) = 13.$$

19. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

20. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda I_m + J(0, m)$.