

## COMPLEMENTOS MATEMÁTICA 3 (CA, F, O)

## Práctica 0: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en  $\mathbb{R}$ :

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{iv)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

¿Cambia algo si los sistemas se resuelven en  $\mathbb{Q}$  o en  $\mathbb{C}$ ?

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$\text{i)} \{x + 2y - 3z = 4 \quad \text{ii)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$$

3. Sea  $H$  un sistema lineal homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas. Probar:

- Si  $n < m$ , entonces  $H$  tiene alguna solución no nula.
- Si  $m < n$ , entonces existe un sistema lineal homogéneo  $H'$  de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de  $H$ .

4. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

5. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{iv)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

6. Sea  $H$  un sistema lineal no homogéneo y sea  $p$  una solución de  $H$ . Sea  $H_0$  el sistema lineal homogéneo asociado a  $H$ . Probar que si  $S$  y  $S_0$  son los conjuntos de soluciones de  $H$  y  $H_0$  respectivamente, entonces  $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$ .

7. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema admite solución.

8. Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i) } \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

9. Encuentre un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

- |  |   |
|--|---|
| a) $AB = BA$                                   | e) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$                    |
| b) $(AB)^2 = A^2B^2$                           | f) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$                    |
| c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$ | g) $A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = I_n$ |
| d) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$    |   |

11. Caracterizar el conjunto  $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / AB = BA \ \forall B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\}$ .

12. Exhibir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $A^2 = -I$

13. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para que:

- a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$   
 b)  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

14. Demostrar que si  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $Ax = Bx \ \forall x \in \mathbb{K}^n$ , entonces  $A = B$ .

15. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{v) } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{vi) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar:

- Si  $A$  es inversible entonces  $AB = 0 \Rightarrow B = 0$  y  $AB = AC \Rightarrow B = C$
- Si  $A$  no es inversible, existe  $B \neq 0, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $AB = 0$ .
- $A, B$  inversibles  $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

17. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversibles  $\Rightarrow A + B$  es inversible
- $A$  inversible  $\iff A^t$  inversible.
- $A$  nilpotente (es decir,  $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$ )  $\Rightarrow A$  no es inversible.

*Nota:* Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se llama **matriz transpuesta de  $A$**  a la matriz  $A^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

18. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $b \in \mathbb{R}^n$ . Probar que el sistema  $Ax = b$  tiene solución única  $\iff A$  inversible.