

COMPLEMENTOS MATEMÁTICA 3 (CA, F, O)

Práctica 1: Espacios vectoriales

En esta práctica consideramos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $k \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

- a) $0v = \vec{0}$
- b) $k\vec{0} = \vec{0}$
- c) $(-1)v = -v$
- d) $-(-v) = v$
- e) $kv = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$
- f) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V , con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} :

a) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in \mathbb{K} \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de \mathbb{K} .

$$1) + : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$2) \cdot : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

b) Dado X un conjunto, sea $V = \mathbb{K}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$.

$$1) + : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

$$2) \cdot : (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in X$$

3. Caracterizar geoméricamente todos los subespacios de \mathbb{R}^2 .

4. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como \mathbb{K} -espacio vectorial:

$$a) S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1); a, b \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^3, \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$b) S_2 = \{ai / a \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{C}, \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$$c) S_3 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr } f \geq 2\}, V = \mathbb{K}[X]$$

$$d) S_4 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr } f \leq 5\}, V = \mathbb{K}[X]$$

$$e) S_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4 \times 4} / M^t = M\}, V = \mathbb{K}^{4 \times 4}$$

$$f) S_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3 \times 3} / \text{tr}(M) = 0\}, V = \mathbb{K}^{3 \times 3}$$

$$g) S_7 = C^\infty(\mathbb{R}), V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$h) S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''(1) = f(2)\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

- i) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_9 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- j) $S_{10} = \{f \in C(\mathbb{R}) / \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- k) $S_{11} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\}$, $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A . Probar que S es un subespacio de \mathbb{K}^m .

6. Sean S y T subespacios de un \mathbb{K} -espacio vectorial V :

- a) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V .
- b) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.
- c) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre \mathbb{K} :

- a) \mathbb{K}^n
- b) $\mathbb{K}_n[X] = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$
- c) $\mathbb{K}[X]$
- d) $\mathbb{K}^{n \times n}$
- e) \mathbb{C}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- f) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- g) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- h) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- i) $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

8. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
- c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

9. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3 \in V$.

Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle$.

10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

- a) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v, w \in V$.
Entonces $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$.

b) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$.

Entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.

c) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, w \in V$.

$\langle v_1, v_2, v_3, w \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \iff w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

11. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre \mathbb{K} :

a) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $(1 - i, i), (2, -1 + i)$ en \mathbb{C}^2 para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

c) $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$ en $\mathbb{K}[X]$

d) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

e) $f(x) = e^x, g(x) = x, h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

f) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

12. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Probar:

a) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i.

b) $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i.

c) $\lambda \in \mathbb{K}$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el “método de triangulación” para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en \mathbb{K}^n .

13. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 es un conjunto linealmente independiente:

a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\}$

b) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\}$

14. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{K} -espacios vectoriales

a) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) \mathbb{C} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

d) $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f(2) = f(-1)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

e) $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f \text{ es un múltiplo de } (x^2 - 2)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

f) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \forall i, j\}$

15. a) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, 1, i)\}$ es base de \mathbb{C}^3 como \mathbb{C} -espacio vectorial pero no como \mathbb{R} -espacio vectorial. Calcular la dimensión de \mathbb{C}^3 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- b) Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{C} -espacio vectorial pero no como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- c) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial?

16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del \mathbb{K} -espacio vectorial V indicado:

a) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

17. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

a) $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

18. Hallar la dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle.$$

20. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa:

- a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$
 b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
 c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
 d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
 e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X]/f'(0) = f''(0) = 0\}$

21. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad y \quad T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle.$$

22. a) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f \text{ es constante}\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
 b) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n}/A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n}/A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T , *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n \times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n \times n}$.

23. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

- a) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
 b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}/\text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{4 \times 4}$
 c) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

24. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

- a) S, T subespacios de \mathbb{R}^3 , $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$
 b) S, T, W subespacios de \mathbb{R}^5 , $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

25. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$):

- a) Probar que $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$.
 b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$.
 Calcular $\dim(S \cap T)$.
 c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

26. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

- a) $V = \mathbb{K}^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica

- b) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$
c) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
d) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
e) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$
f) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

27. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B, B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B' :

- a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (2, 3)$
b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$,
 $v = (-1, 5, 6)$
c) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$, $v = X$
d) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$
e) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$

E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares.

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}, v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

28. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B'' bases de V .

Probar que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$. Deducir que $C(B, B')$ es una matriz inversible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

29. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de \mathbb{K}^n . Sea M la matriz cuyas columnas son v_1, \dots, v_n y sea N la matriz cuyas columnas son w_1, \dots, w_n (ordenadamente). Probar que $C(B, B') = N^{-1}M$.