COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2005
Práctica 1 - Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: ($K = \mathbb{R}$)

i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

Ejercicio 2. Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Probar:

i) Si $n < m$, entonces H tiene alguna solución no nula.
ii) Si $m < n$, entonces existe un sistema lineal homogéneo H' de m ecuaciones con m incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de H.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

i) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 4. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

i) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ejercicio 5. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

Ejercicio 6. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

Ejercicio 7. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)}\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \qquad \text{ii)}\ \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Ejercicio 8. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,0)$.

Matrices

Ejercicio 9.

i) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para $K^{2\times 2}$ y usar multiplicación por bloques.)

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} / \ A.B = B.A\ \ \forall\, B \in K^{3\times 3}\}$.

Ejercicio 10.

i) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$

ii) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones $\forall n \geq 2$:

a) $(A.B)^2 = A^2B^2$

b) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

c) $A.B = A.C$ y A $\neq 0 \Rightarrow$ B = C

d) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$

e) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

f) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

iii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que:
   a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   b) $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

Ejercicio 11. Si A, $B \in K^{m\times n}$ y $A.x = B.x \ \forall\, x \in K^n$, probar que $A = B$.

Ejercicio 12. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A.B = A.C \Rightarrow B = C$
ii) $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 14. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

i) A, $B \in K^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible
ii) Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in K^{n\times n}$ que cumple que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}, \forall\, 1 \le i, j \le n$. Entonces A inversible $\iff$ A^t inversible.
iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} \ / \ A^j = 0) \Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 15. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff$ A inversible.

Lecturas complementarias: Algunas aplicaciones de estos temas pueden encontrarse en el libro *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra* de Carl D. Meyer: Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales (página 18), circuitos eléctricos (página 73) y resortes (página 86).